Bulletin de la Classe des sciences

Sur une variété algébrique à trois dimensions possédant huit points quadruples

Lucien Godeaux

Résumé

Étude d'une variété algébrique à trois dimensions re¬ présentant une involution du second ordre possédant huit points unis, appartenant à l'intersection de trois hyperquadriques d'un espace à six dimensions. La variété, d'ordre 32, appartient à un espace linéaire à douze dimensions, possède huit points quadruples et contient un système linéaire de dimension trois de surfaces de genres pα = pg = O, P6 = 1 et un réseau de surfaces de genres pα = P4 = 1.

Sur une variété algébrique à trois dimensions possédant huit points quadruples

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Étude d'une variété algébrique à trois dimensions représentant une involution du second ordre possédant huit points unis, appartenant à l'intersection de trois hyperquadriques d'un espace à six dimensions. La variété, d'ordre 32, appartient à un espace linéaire à douze dimensions, possède huit points quadruples et contient un système linéaire de dimension trois de surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ et un réseau de surfaces de genres $p_a = P_4 = 1$.

A plusieurs reprises nous avons considéré des surfaces et des variétés à trois dimensions sections par des espaces linéaires de la variété des droites joignant les points de deux variétés de Veronese [1]. C'est à une question analogue qu'est consacrée cette note.

Nous considérons, dans un espace linéaire S_6 à six dimensions, une variété V_3^8 intersection de trois hyperquadriques, transformée en elle-même par une homographie biaxiale harmonique dont les axes sont un plan et un espace linéaire à trois dimensions. Cette homographie engendre sur la variété une involution du second ordre ayant huit points unis. La variété que nous étudions ici est une image de cette involution. Elle possède huit points quadruples, points de diramation homologues des huit points unis.

(1) *Une famille de surfaces algébriques de diviseur deux* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1959, pp. 373-380), *Remarque sur les variétés algébriques à trois dimensions dont la surface canonique est d'ordre zéro* (Idem, 1962, pp. 989-995).

La variété contient un système linéaire triplement infini de surfaces dépourvues de courbe canonique mais possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro ($p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$) et un réseau de surfaces dont les courbes canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro ($p_a = P_4 = 1$). Les relations entre ces deux systèmes présentent un certain intérêt.

1. Considérons, dans un espace linéaire S_6 à six dimensions un plan σ_1 et un espace linéaire à trois dimensions σ_2 ne se rencontrant pas et dans un espace linéaire S_{15} à quinze dimensions un espace Σ_1 à cinq dimensions et un espace Σ_2 à neuf dimensions, ne se rencontrant pas. Soient, dans Σ_1, une surface de Veronese Ω_1, d'ordre quatre, représentant les coniques du plan σ_1 et dans Σ_2, une variété de Veronese Ω_2, d'ordre huit, représentant les quadriques de l'espace σ_2. L'homographie biaxiale harmonique H, d'axes σ_1, σ_2 engendre dans l'espace S_6 une involution I du second ordre dont une image est la variété W_6^{32} lieu des droites s'appuyant sur Ω_1 et Ω_2.

Si nous désignons par y_0, y_1, y_2, z_0, z_1, z_2, z_3 les coordonnées des points de S_6 de telle sorte que $z_0 = z_1 = z_2 = z_3 = 0$ soient les équations du plan σ_1 et $y_0 = y_1 = y_2 = 0$ celles de l'espace σ_2 et si nous posons

$$Y_{ik} = y_i y_k = y_k y_i, \quad Z_{ik} = z_i z_k = z_k z_i,$$

les équations de la variété W_6^{32} s'obtiendront en écrivant que les déterminants

$$\left\| \begin{matrix} Y_{00} & Y_{01} & Y_{02} \\ Y_{01} & Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{02} & Y_{12} & Y_{22} \end{matrix} \right\| = 0, \qquad \left\| \begin{matrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} & Z_{03} \\ Z_{01} & Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{02} & Z_{12} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{03} & Z_{13} & Z_{23} & Z_{33} \end{matrix} \right\| = 0$$

sont de caractéristique un.

L'homographie H a pour équations

$$y_i' : z_k' = y_i : -z_k \qquad (i = 0, 1, 2 ;\ k = 0, 1, 2, 3).$$

Aux sections hyperplanes

$$\Sigma\lambda_{ik} Y_{ik} + \Sigma\mu_{ik} Z_{ik} = 0$$

de W_6^{32} correspondent les hyperquadriques

$$\Sigma\lambda_{ik}y_iy_k + \Sigma\mu_{ik}z_iz_k = 0 \qquad (1)$$

ne passant pas par les axes σ_1, σ_2 de H.

2. Considérons dans S_6 la variété V_3^8 intersection des trois hyperquadriques

$$\Sigma a_{ik}^{(r)}y_iy_k + \Sigma b_{ik}^{(r)}z_iz_k = 0, \qquad (r = 0, 1, 2) \qquad (2)$$

linéairement indépendantes. Les sections hyperplanes de V_3^8 sont des surfaces régulières à courbes canonique et pluricanoniques d'ordre zéro ($p_a = P_4 = 1$). Cette variété est transformée en soi par H et lui correspond, sur W_6^{32} une variété V_3^{32} située dans un espace S_{12} à 12 dimensions, intersection des trois hyperplans homologues des trois hyperquadriques (2).

Sur V_3^8, l'homographie H détermine une involution I d'ordre deux présentant huit points unis aux points de rencontre de la variété avec l'espace σ_2. On observera que la variété ne rencontre pas le plan σ_1.

Désignons par F_0 les sections hyperplanes de V_3^{32} et par F_0' les surfaces qui leur correspondent dans S_6 et qui sont les intersections de V_3^8 par les hyperquadriques (1).

On sait que le système canonique d'une surface F_0', intersection de quatre hyperquadriques dans S_6, coïncide avec le système des sections hyperplanes. Par conséquent cette surface a les genres $p_a = p_g = 7$, $p^{(1)} = 17$. Par conséquent, une surface F_0 a les genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 9$, puisqu'elle est l'image d'une involution du second ordre privée de points unis appartenant à F_0'.

Désignons maintenant par F_1' les sections de V_3^8 par les hyperquadriques

$$\Sigma\lambda_{ik}y_iz_k = 0 \qquad (3)$$

passant par les espaces σ_1, σ_2 et par F_1 les surfaces qui leur correspondent sur V_3^{32}.

Une surface F_1' a les mêmes caractères que les surfaces F_0' mais sur F_1', l'homographie H détermine une involution du second ordre présentant huit points unis (dans σ_2). Il en résulte que la surface F_1 correspondante a les genres $p_a = p_g = 4$, $p^{(1)} = 9$. Les surfaces F_1 sont d'ordre 32. Sur V_3^{32}, elles forment un système linéaire de dimension onze.

3. Aux huit points unis de l'involution I', section de la variété V_3^8 par l'espace σ_2, correspondent sur V_3^{32} les huit points d'intersection de la variété Ω_2 avec l'espace S_{12}. Ces points sont donc quadruples pour la variété V_3^{32}, le cône tangent en chacun d'eux étant la section par S_{12} du cône projetant la surface Ω_1 du point considéré. Ces points sont doubles pour les surfaces F_1 d'après la théorie des involutions.

Chacun des points quadruples de la variété V_3^{32} est équivalent, au point de vue des transformations birationnelles, à une surface rationnelle. Désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$ les huit surfaces rationnelles équivalentes aux huit points quadruples (et équivalentes d'ailleurs chacune à une surface de Veronese).

D'après la théorie des involutions, on a

$$2F_0 \equiv 2F_1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_8.$$

Observons d'ailleurs que si l'on élève au carré les deux membres de l'équation (3), on obtient

$$\Sigma\lambda_{ik}\lambda_{jh}Y_{ij}Z_{kh} = 0,$$

ce qui montre que le long d'une surface F_1, il y a une hyperquadrique inscrite dans la variété V_3^{32}.

4. Envisageons maintenant la section de V_3 par un hyperplan

$$\mu_0 z_0 + \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3 = 0$$

passant par σ_1. C'est une surface G_1' de genres $p_a = P_4 = 1$. Elle est transformée en soi par l'homographie H et celle-ci détermine sur la surface une involution du second ordre privée de points unis. Par conséquent il correspond à G_1' sur V_3^{32} une surface G_1 privée de courbe canonique mais ayant une courbe bicanonique d'ordre zéro ($p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$). Les surfaces G_1 forment un système linéaire $|G_1|$ de dimension trois. Elles ont l'ordre 16.

Un hyperplan

$$\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$$

passant par σ_2 découpe sur V_3^8 une surface G_2' de genres $p_a = P_4 = 1$. Sur cette surface, H détermine une involution du second ordre ayant huit points unis. Par conséquent il correspond à G_2' sur V_3^{32} une surface G_2 de genres $p_a = P_4 = 1$ ayant huit points doubles coniques aux points quadruples de la variété. Les surfaces G_2 forment un réseau $|G_2|$; elles ont l'ordre 16.

L'ensemble d'un hyperplan passant par σ_1 et d'un hyperplan passant par σ_2 est une hyperquadrique du système (3). On en conclut que le long d'une surface G_1 ou d'une surface G_2, il y a un hyperplan touchant la variété V_3^{32}. Par suite, on a

$$G_1 + G_2 \equiv F_1,$$
$$F \equiv 2G_1 + 2G_2 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_8.$$

5. Considérons, dans S_6, une surface F_0', soit $\overline{F}_0'$ et la surface $\overline{F}_0$ qui lui correspond sur V_3^{32}. Le système canonique de $\overline{F}_0'$ coïncide avec celui des sections hyperplanes et dans ce système, il y a deux systèmes linéaires partiels $|(\overline{F}_0', G_1')|$ et $|(\overline{F}_0', G_2')|$ appartenant à l'involution I'. A l'un de ces systèmes correspond sur $\overline{F}_0$ le système canonique de cette surface. L'involution sur $\overline{F}_0$ étant dépourvue de points unis, nous avons démontré (1) que le système canonique de $\overline{F}_0$ correspondait à celui des systèmes rencontrés plus haut de dimension minimum. Le réseau $|G_2|$ découpe donc sur la surface $\overline{F}_0$ et plus généralement sur une surface F_0, le système canonique de cette surface. En d'autres termes, le réseau $|G_2|$ est l'adjoint au système $|F_0|$.

Envisageons maintenant une surface $\overline{F}_1'$ et soit $\overline{F}_1$ la surface qui lui correspond sur V_3^{32}. Le système canonique de $\overline{F}_1'$ coïncide avec celui des sections hyperplanes et l'involution déterminée par I' sur la surface possède huit points unis, par conséquent le système canonique de $\overline{F}_1$ correspond au système $|(\overline{F}_1', G_1')|$. Donc le système $|G_1|$ est l'adjoint au système $|F_1|$.

Un hyperplan passant par σ_1 appartient à ∞^3 hypercônes quadratiques de sommet σ_1, c'est-à-dire à ∞^3 hypersurfaces F_0', donc par une surfaces G_1 passent ∞^3 hyperplans de S_{12}. Une surface G_1 appartient donc à un espace linéaire à huit dimensions.

(1) *Sur les involutions cycliques dépourvues de points unis appartenant à une surface algébrique régulière* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 1932, pp. 672-679).

Un espace linéaire à quatre dimensions passant par σ_1 appartient à ∞^6 hypercônes quadratiques de sommet σ_1, donc par une courbe (G_1, G_1) passent ∞^6 hyperplans de S_{12}. Il en résulte que les courbes (G_1, G_1) appartiennent à des espaces linéaires à six dimensions.

Un hyperplan passant par σ_2 appartient à ∞^2 hypercônes quadratiques de sommet σ^2, donc une surface G_2 appartient à ∞^2 hyperplans de S_{12} et est située dans un espace linéaire à neuf dimensions.

Un espace à quatre dimensions passant par σ_2 appartient à ∞^1 hypercônes quadratiques de sommet σ_2, donc une courbe (G_2, G_2) appartient à ∞^4 hyperplans de S_{12} et est par suite située dans un espace linéaire à sept dimensions.

Observons que les huit points quadruples de la variété V_3^{32} appartiennent à l'intersection des espaces S_{12} et Σ_2 dans S_{15}, c'est-à-dire à un espace σ_2 à six dimensions. Un espace à sept dimensions passant par σ_2 et par un point de V_3^{32} rencontre cette variété en une infinité de points et précisément suivant une courbe (G_2, G_2).

6. Les courbes (G_1', G_1'), (G_1', G_2'), (G_2', G_2') ont le genre cinq. Sur chacune d'elles, l'homographie H détermine une involution qui, pour les deux premières est dépourvue de points unis et pour la troisième, possède huit points unis. Par la formule de Zeuthen, il en résulte que les courbes (G_1, G_1), (G_1, G_2) ont le genre trois et que les courbes (G_2, G_2) sont elliptiques. Toutes ces courbes ont le même ordre huit.

Sur une surface $\overline{G}_1$, qui a le diviseur deux, on a

$$2(\overline{G}_1, G_1) = 2(\overline{G}_1, G_2)$$

et sur une surface $\overline{G}_2$,

$$2(\overline{G}_2, G_1) = 2(\overline{G}_2, G_2) + (\overline{G}_2, a_1) + (\overline{G}_2, a_2) + \ldots + (\overline{G}_2, a_8).$$

Les sections hyperplanes des surfaces G_1, G_2 sont de genre neuf et par conséquent ces surfaces sont normales. Il en est de même des courbes (G_1, G_1), (G_2, G_2), (G_1, G_2), ces dernières appartenant à des espaces à cinq dimensions.

Le système $|G_1|$ a le degré quatre et le système $|G_2|$ le degré zéro.

Liège, le 15 octobre 1962.