Bulletin de la Classe des sciences

Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de bigenre un

Lucien Godeaux

Résumé

On démontre que si les sections hyperplanes d'une variété algébrique à trois dimensions, non conique, sont des surfaces privées de courbe canonique mais ayant une courbe bicanonique d'ordre zéro, cette variété est l'image d'une involution du second ordre, ayant huit points unis, appartenant à une variété algébrique à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces possédant des courbes canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.

COMMUNICATIONS D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de bigenre un,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On démontre que si les sections hyperplanes d'une variété algébrique à trois dimensions, non conique, sont des surfaces privées de courbe canonique mais ayant une courbe bicanonique d'ordre zéro, cette variété est l'image d'une involution du second ordre, ayant huit points unis, appartenant à une variété algébrique à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces possédant des courbes canonique et pluricanoniques d'ordre zéro.

Nous avons démontré autrefois le théorème suivant [1] : *Toute variété algébrique normale à trois dimensions, non conique, dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres zéro et de bigenre un* ($p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$) *contient un système linéaire de surfaces de genres un* ($p_a = P_4 = 1$) *dont la dimension, augmentée d'une unité est égale à la dimension de l'espace ambiant.*

Rappelons qu'une surface de genres zéro et de bigenre un ($p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$) est une surface dépourvue de courbe canonique mais possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro. Sur cette surface, un système linéaire $|C|$ de courbes de genre $\pi > 1$, a le degré $2\pi - 2$ et la dimension $\pi - 1$. Son adjoint $|C'|$ a les mêmes caractères et on a $|2C| = |2C'|$, la surface ayant le

(1) *Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genre zéro et de bigenre un* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1933, pp. 134-140).

diviseur de Severi $\sigma = 2$. Une surface de genres un ($p_a = P_4 = 1$) possède des courbes canonique et pluricanoniques d'ordre zéro. Sur une telle surface, un système linéaire $|C|$ de genre π, a le degré $2\pi - 2$ et la dimension π.

Les variétés que nous considérons sont d'ordre $2\pi - 2$, à courbes-sections de genre π, normales dans un espace à π dimensions. Reprenant leur étude quelques années plus tard [1], G. Fano a démontré que π ne pouvait prendre que les valeurs 4, 6, 7, 9 et 13 et que, pour $\pi > 4$, la variété possède huit points quadruples isolés, le cône tangent en chacun de ces points ayant pour sections hyperplanes des surfaces de Veronese.

F. Enriques a démontré qu'une surface de genres zéro et de bigenre un est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genre un [2]. Un théorème analogue existe-t-il pour les variétés que nous considérons ici ? La réponse est affirmative et nous démontrons précisément que :

Une variété algébrique à trois dimensions, non conique, dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ est l'image d'une involution du second ordre, possédant huit points unis, appartenant à une variété à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres $p_a = P_4 = 1$.

1. Soit V une variété algébrique à trois dimensions, normale, d'ordre $2\pi - 2$, dont les sections hyperplanes sont des surfaces F_0 de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, dépourvues de courbe canonique mais possédant une courbe bicanonique d'ordre zéro. Ces surfaces étant normales dans un espace à $\pi - 1$ dimensions, la variété V appartient à un espace S_π à π dimensions.

Comme nous l'avons démontré, il existe sur la variété V un système linéaire à $\pi - 1$ dimensions, de surfaces F_1 d'ordre $2\pi - 2$, de genres $p_a = P_4 = 1$, c'est-à-dire de surfaces dont les courbes canonique et pluricanoniques sont d'ordre zéro.

(1) *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni le cui sezioni iperpiane sono superficie di genere zero e bigenere uno* (Memorie della Società italiana delle Scienze, 1938, pp. 1-26).

(2) *Un'osservazione relativa alle superficie di bigenere* 1 (Rendiconto della Accademia delle Scienze di Bologna, 1908, pp. 1-8).

Sur une surface $\overline{F}_0$ de $|F_0|$, on a la relation fonctionnelle

$$2(\overline{F}_0, F_0) \equiv 2(\overline{F}_0, F_1).$$

Fano a démontré que la variété V n'existe que pour $\pi = 4, 6, 7, 9, 13$ et que pour $\pi \geqslant 6$, la variété possède huit points quadruples coniques isolés, le cône tangent en un point étant la projection de ce point d'une surface de Veronese.

Nous supposerons en premier lieu $\pi \geqslant 6$ et nous désignerons par $A_1, A_2, \ldots, A_8$ les huit points quadruples de la variété. Chacun de ces points est équivalent au point de vue des transformations birationnelles à une surface rationnelle ; soient respectivement $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_8$ ces surfaces.

Le fait que les surfaces F_0 ont le diviseur de Severi égal à deux se traduit par la relation fonctionnelle

$$2F_0 \equiv 2F_1 + \alpha_1 + \alpha_2 = \ldots + \alpha_8 \qquad (1)$$

Rappelons que les courbes (F_0, F_0), (F_0, F_1) ont le genre π. D'autre part, les surfaces F_1 découpant sur l'une d'entre elles un système linéaire de dimension $\pi - 2$, les courbes (F_1, F_1) sont de genre $\pi - 2$.

La relation (1) donne, sur une surface $\overline{F}_1$ de $|F_1|$ la relation

$$2(\overline{F}_1, F_0) \equiv 2(\overline{F}_1, F_1) + (\overline{F}_1, \alpha_1) + (\overline{F}_1, \alpha_2) + \ldots + (\overline{F}_1, \alpha_8).$$

Une surface F_1 ayant les genres $p_a = P_4 = 1$, ne peut posséder de point de multiplicité supérieur à deux, donc les courbes $(\overline{F}_1, \alpha_1), (\overline{F}_1, \alpha_2), \ldots, (\overline{F}_1, \alpha_8)$ sont des courbes rationnelles de degré virtuel -2 et les points $A_1, A_2, \ldots, A_8$ sont doubles coniques pour la surface $\overline{F}_1$, donc pour les surfaces F_1.

2. La relation fonctionnelle (1) admet l'interprétation géométrique suivante : Le système $|2F_0|$ est découpé sur V par les hyperquadriques de l'espace S_π. Parmi ces hyperquadriques, il y en a passant par les points $A_1, A_2, \ldots, A_8$ qui touchent la variété V le long d'une surface F_1.

Cela étant soient

$$f_1(x_0, x_1, x_1, \ldots, x_\pi) = 0, \quad f_2 = 0, \ldots, f_r = 0$$

les équations de la variété $V (r \geqslant \pi - 2)$ et

$$\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_\pi) = 0$$

l'équation d'une hyperquadrique touchant la variété V le long d'une surface F_1.

Considérons, dans un espace $S_{\pi-1}$, la variété d'équations

$$f_1 = 0, \; f_2 = 0, \; \ldots, \; f_r = 0, \; z^2 = \varphi.$$

C'est une variété double que nous désignerons par W. Nous allons démontrer qu'elle est irréductible.

Considérons une surface $\overline{F}_1$ de $|F_1|$ n'appartenant pas à l'hyperquadrique $\varphi = 0$. Celle-ci touche la surface $\overline{F}_1$ le long d'une courbe du système $|(\overline{F}_1, F_1)|$ passant simplement par les huit points $A_1, A_2, \ldots, A_8$. On sait que la surface double $\overline{F}_1$ ayant pour points de diramation huit points doubles est irréductible. Par conséquent la variété W contient un système linéaire de surfaces irréductibles correspondant au système $|F_1|$ et est nécessairement irréductible.

A une surface F_0 correspond sur W une surface Φ_0. Dans le passage F_0 à Φ_0, il n'y a aucune diramation, donc entre les genres arithmétiques p_a de F_0 et p'_a de Φ_0, on a la relation

$$2(p_a + 1) = p'_a + 1,$$

d'où $p'_a = 1$. On sait d'ailleurs que la surface Φ_0 est de genres $p_a = P_4 = 1$.

A une surface F_1 correspond sur W une surface Φ_1. Dans la correspondance (1,2) entre une surface F_1 et la surface Φ_1 homologue, il y a huit points de diramation. On sait que la surface Φ_1 est de genres $p_a = P_4 = 1$.

La relation (1) donne $\Phi_0 \equiv \Phi_1$.

Les surfaces Φ_0, Φ_1 sont d'ordre $4\pi - 4$ et appartiennent à un même système linéaire $|\Phi|$ que nous prendrons comme système des sections hyperplanes de la variété W. Les systèmes linéaires partiels $|\Phi_0|$, $|\Phi_1|$ ont respectivement les dimensions π et $\pi - 1$ et n'ont aucune surface commune, donc la dimension de $|\Phi|$ est au moins égale à 2π. Une section hyperspatiale de la variété W est une surface de genres $p_a = P_4 = 1$ d'ordre $4\pi - 4$, donc elle appartient à un espace à $2\pi - 1$ dimensions. Il en résulte que W est une variété normale dans un espace $S_{2\pi}$ à 2π dimensions.

La variété W contient une involution du second ordre possédant huit points unis. Cette involution est déterminée par une homographie harmonique H ayant deux axes ponctuels σ_0 de dimension $\pi - 1$ et σ_1 de dimension π. Les hyperplans passant par σ_0 découpent sur W les surfaces Φ_0 et ceux passant par σ_1 les surfaces Φ_1. L'espace σ_1 rencontre la variété W en huit points, l'espace σ_0 ne la rencontrant pas.

3. Reste à considérer le cas $\pi = 4$. La variété V appartient à un espace S_4 à quatre dimensions et nous avons établi qu'elle a pour équation

$$\begin{aligned} x_1x_2x_3x_4[x_0^2f_0 + x_0f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)] \\ + \varphi_2(x_2x_3x_4, x_3x_4x_1, x_4x_1x_2, x_1x_2x_3) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

où f_0 est une constante, f_1 une forme linéaire, f_2 une forme quadratique et enfin φ_2 une forme quadratique de ses arguments.

Cette variété possède un point quadruple $0_0(1, 0, 0, 0, 0)$ et passe doublement par les plans communs aux hyperplans $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ pris deux à deux.

Ses sections hyperplanes sont des surfaces d'Enriques, du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre. Les sections de V par les hyperplans passant par 0_0 sont des formes particulières de la surface d'Enriques, déjà signalées par celui-ci.

Considérons la surface $\overline{F}_0$ section de V par l'hyperplan $x_0 = 0$

$$x_1x_2x_3x_4f_2 + \varphi_2 = 0. \tag{3}$$

Passons aux coordonnées non homogènes en supposant x_1, x_2, x_3, x_4 fonctions linéaires de x, y, z. Ajoutons à l'équation (3) l'équation

$$v^2 = x_1x_2x_3x_4.$$

Dans la note citée plus haut, Enriques a démontré que les équations (3) et (4) représentent une surface irréductible de genres $p_a = P_4 = 1$, dans un espace à quatre dimensions.

Cela étant, considérons la variété W d'équations

$$x_1x_2x_3x_4(x_0^2f_0 + x_0f_1 + f_2) + \varphi_2 = 0, \qquad v^2 = x_1x_2x_3x_4,$$

où l'on suppose x_1, x_2, x_3, x_4 exprimés en fonction de coordonnées non homogènes x, y, z, u d'un S_4. D'après le théorème d'Enriques, la section de cette variété par l'hyperplan $x_0 = 0$ est une surface irréductible du même ordre que la variété, donc celle-ci est également irréductible.

Les surfaces F_1 sont découpées sur V par les hypersurfaces

$$\lambda_1x_2x_3x_4 + \lambda_2x_3x_4x_1 + \lambda_3x_4x_1x_2 + \lambda_4x_1x_2x_3 = 0.$$

A une surface F_0 correspond sur la variété W une surface Φ_0 d'ordre 12 et à une surface F_1 une surface Φ_1. Les surfaces Φ_0, Φ_1 appartiennent à un même système $|\Phi|$ que nous pouvons prendre comme système des sections hyperplanes de la variété. Le système $|\Phi|$ a la dimension huit et W se trouve donc imergée dans un espace à huit dimensions S_8.

La variété W est transformée en soi par une homographie harmonique H possédant deux axes ponctuels σ_0, σ_1. Les hyperplans passant par l'espace à trois dimensions σ_0 découpent les surfaces Φ_0 et ceux passant par l'espace à quatre dimensions σ_1 les surfaces Φ_1. Ce second espace σ_1 doit rencontrer la variété W aux huit points unis de l'involution d'image V.

4. On peut d'ailleurs, comme nous allons le montrer, former les équations de la variété W.

Désignons par $x_0, x_1, \ldots, x_8$ les coordonnées des points de S_8 et supposons que les équations de l'homographie H soient

$$H = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & -x_5 & -x_6 & -x_7 & -x_8 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 \end{pmatrix}.$$

L'élimination de x_5, x_6, x_7, x_8 entre les équations de la variété W doit donner l'équation de V, par conséquent on doit avoir

$$\rho x_5 = x_2x_3x_4, \quad \rho x_6 = x_3x_4x_1, \quad \rho x_7 = x_4x_1x_2, \quad \rho x_8 = x_1x_2x_3. \qquad (1)$$

Transportons dans l'équation de V, cela donne

$$x_1x_2x_3x_4[x_0^2f_0 + x_0f_1(x_1, x_2, x_3, x_4,) + f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)] \\ + \rho^2\varphi_2(x_5, x_6, x_7, x_8,) = 0,$$

d'où

$$\rho^2 = x_1x_2x_3x_4.$$

Des relations (1), on déduit

$$\rho^2 x_5x_6 = x_1x_2x_3^2x_4^2,$$

d'où $x_5x_6 = x_3x_4$, équation d'une hyperquadrique passant par W.

Par le même procédé, on obtient les équations de six hyperquadriques contenant W :

$$\left.\begin{array}{lll} x_5x_6 = x_3x_4, & x_5x_7 = x_2x_4, & x_5x_8 = x_2x_3, \\ x_6x_7 = x_1x_4, & x_6x_8 = x_1x_3, & x_7x_8 = x_1x_2. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

D'autre part, des équations (1), on tire (3)

$$x_1x_5 = x_2x_6 = x_3x_7 = x_4x_8,$$

c'est-à-dire les équations de trois nouvelles hyperquadriques contenant W.

La variété W est donc l'intersection des hyperquadriques (2), (3) et

$$x_0^2f_0+x_0f_1(x_1, x_2, x_3, x_4)+f_2(x_1, x_2, x_3, x_4)+\varphi_2(x_5, x_6, x_7, x_8) = 0. \quad (4)$$

On sait d'ailleurs qu'une variété normale de S_8, d'ordre 12, dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres un, est commune à dix hyperquadriques.

Observons qu'en utilisant les équations (2), on peut supposer que φ_2 ne contient que les termes en x_5^2, x_6^2, x_7^2, x_8^2.

On vérifie aisément que l'espace $\sigma_0(x_0 = x_1 = \ldots = x_4 = 0)$ ne rencontre pas la variété W. Par contre, l'espace $\sigma_1(x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0)$ la rencontre en huit points situés sur la quadrique

$$x_0^2f_0 + x_0f_1 + f_2 = 0$$

et sur les droites représentées par trois des équations

$$x_1 = 0, \ x_2 = 0, \ x_3 = 0, \ x_4 = 0.$$

Les points de diramation sur la variété V appartiennent à des droites triples de cette variété.

Liège, le 13 novembre 1962.