Bulletin de la Classe des sciences

Sur la construction de certaines surfaces algébriques

Lucien Godeaux

Résumé
Construction de surfaces algébriques hyperspatiales touchant un espace linéaire le long d'une courbe.

Sur la construction de certaines surfaces algébriques

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction de surfaces algébriques hyperspatiales touchant un espace linéaire le long d'une courbe.

Nous avons dans des notes antérieures construit des surfaces algébriques ayant une seule courbe canonique de genre quatre ou cinq le long de laquelle un hyperplan touche la surface [1]. On peut se demander si la même méthode peut conduire à la construction de surfaces ayant une seule courbe canonique de genre supérieur à cinq. La réponse est négative. Nous construisons dans cette note des surfaces ayant une équation analogue à celles des surfaces mentionnées, touchant une courbe le long d'un espace linéaire, dont le système canonique est infini. Malgré ce résultat négatif, il nous a paru intéressant de signaler cette construction.

1. Considérons, dans un espace linéaire S_n à n dimensions, l'homographie H de période quatre, d'équations

$$\begin{aligned}
\rho x_i' &= x_i, && (i = 0, 1, \ldots, h)\\
\rho x_i' &= -x_i, && (i = h+1, h+2, \ldots, k),\\
\rho x_i' &= ix_i, && (i = k+1, k+2, \ldots, l),\\
\rho x_i' &= -ix_i, && (i = l+1, l+2, \ldots, n)
\end{aligned}$$

[1] *Construction d'une surface algébrique possédant une seule courbe canonique de genre cinq* (BULLETIN DE L'ACAD. ROYALE DE BELGIQUE, 1959, pp. 441-446) ; *Une surface bicanonique de l'espace à quatre dimensions* (IDEM, 1960, pp. 113-118).

et la surface F, intersection complète de $n - 2$ hyperquadriques

$$\varphi_i(x_0, x_1, \ldots, x_h) + \psi_i(x_{h-1}, \ldots, x_k) + \Sigma\, a^{(i)}_{k+j, l+j'}\, x_{k+j}\, x_{l+j'} = 0, \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n - 4\,;\ j = 1, 2, \ldots, l - k\,;\ j' = 1, 2, \ldots, n - 1),$$

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma\, b_{j, h+j'}\, x_j x_{h+j'} + \varphi(x_{k+1}, \ldots, x_l) + \psi(x_{l+1}, \ldots, x_n) = 0, \\ &\Sigma\, b'_{j, h+j'}\, x_j x_{h+j'} + \varphi'(x_{k-1}, \ldots, x_l) + \psi'(x_{l+1}, \ldots, x_n) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$(j = 0, i, \ldots, h\,;\ j' = 1, 2, \ldots, k - h).$$

La surface F est transformée en soi par H et cette homographie détermine sur la surface ine unvolution I du quatrième ordre. Cette involution est privée de points unis si, comme nous le supposerons, on a

$$2 < k < n - 2,$$

car autrement les axes ponctuels de l'homographie harmonique H^2 rencontreraient la surface F. Observons que cette hypothèse entraîne $n > 5$.

2. Nous désignerons par F′ une surface image de l'involution I et pour former ses équations, nous rapporterons projectivement les hyperquadriques dont l'équation est du même type que (1) aux hyperplans d'un espace S_r à

$$r = \binom{h+2}{2} + \binom{k-h+1}{2} + (l - k)(n - l) - 1$$

dimensions.

Posons donc

$$\rho X_{ij} = x_i x_j, \qquad (i, j = 0, 1, \ldots, h),$$

$$\rho Y_{ij} = x_{h+i} x_{h+j}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k - h),$$

$$\rho Z_{ij} = x_{k+i} x_{l+j}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, l - k\,;\ j = 1, 2, \ldots, n - 1)$$

Les équations de F′ s'obtiendront en éliminant les x entre ces équations et celles de la surface F.

Observons que l'on a en premier lieu les équations obtenues en écrivant que les matrices

$$| X_{ij} | = 0, \ (i, j = 0, 1, \ldots, h) \tag{3}$$

$$| Y_{ij} | = 0, \ (i, j = 1, 2, \ldots, k - h) \tag{4}$$

$$| Z_{ij} | = 0, \ (i = 1, 2 ; \ldots, l - k ; j = 1, 2, \ldots, n - l) \tag{5}$$

sont de caractéristique un.

Les équations (3) donnent, dans l'espace (X) à $\binom{h+2}{2} - 1$ dimensions dont les équations sont $Y_{ij} = 0$, $Z_{ij} = 0$, une variété de Veronese d'ordre 2^h.

Les équations (4) donnent, dans l'espace (Y) à $\binom{k-h+1}{2} - 1$ dimensions représenté par $X_{ij} = 0$, $Z_{ij} = 0$, une variété de Veronese d'ordre 2^{k-h-1}.

Enfin les équations (5) représentent, dans l'espace (Z) à $(l - k)(n - l) - 1$ dimensions, la variété de Segre représentanr les couples de points de deux espaces linéaires à $l - k - 1$ et $n - l - 1$ dimensions. Cette variété est d'ordre

$$\frac{(n - k - 2)\,!}{(l - k - 1)\,!\,(n - l - 1)\,!}.$$

Les $n - 4$ équations (1) donneront, dans S_r, $n - 4$ hyperplans.

3. Les équations (2) vont nous donner une dernière équation.

Observons que les expressions

$$(\Sigma b_{j,h+j}, \quad x_j x_{h-j},)^2, \quad (\Sigma b'_{j,h+j}, \quad x_j x_{h+j})^2,$$

$$(\Sigma b_{j,h+j}, \quad x_j x_{h+j}) \quad (\Sigma b'_{j,h-j}, x_j\, x_{h+j})$$

donnent des formes bilinéaires en X, Y. Nous les représenterons respectivement par X_1, X_2, X.

D'autre part, les expressions

$$\varphi(x_{k+1}, \ldots, x_l)\psi(x_{l+1}, \ldots, x_n), \ \varphi\psi', \ \varphi'\psi, \ \varphi'\psi'$$

sont des formes quadratiques en Z. Nous les représenterons respectivement par Φ_{11}, Φ_{12}, Φ_{21}, Φ_{22}.

Cela étant, on voit facilement que l'élimination des x entre les équations (2) et celles qui définissent les X, Y, Z, conduit à l'équation du quatrième degré

$$X(\Phi_{12} + \Phi_{21}) - X_1\Phi_{22} - X_2\Phi_{11} - (\Phi_{12} - \Phi_{21})^2 = 0$$

La surface F' est l'intersection de la variété commune aux variétés (3), (4), (5) et (6) par un espace linéaire à $r - n + 4$ dimensions.

La surface F est d'ordre 2^{n-2} et par conséquent, la surface F' est d'ordre 2^{n-2} également.

On voit d'autre part que l'hypersurface (6) touche l'espace (Z) le long de la variété quadratique

$$\Phi_{12} - \Phi_{21} = 0,\ X_{ij} = 0,\ Y_{ij} = 0.$$

Il en résulte que la surface F' touche en chaque point d'intersection l'espace linéaire de dimension minimum contenant (Y) et (Z) et de même l'espace de dimenson minimum contenant (X) et (Z).

Enfin l'équation (6) étant du premier degré par rapport aux X et du premier degré par rapport aux Y, l'hypersurface qu'elle représente possède deux espaces triples (X) et (Y).

4. Nous avons établi (1) que le genre arithmétique de la surface F, intersection de $n - 2$ hyperquadriques de S_n, est

$$p_a = (n^2 - 9n + 22)2^{n-5} - 1$$

et que les courbes canoniques sont découpées par les hypersurfaces d'ordre $n - 5$. Le genre linéaire de F est donc égal à

$$p^{(1)} = (n - 5)^2 2^{n-2} + 1$$

Entre les genres arithmétiques p_a de F et p'_a de F' nous avons la relation

$$p_a + 1 = 4(p'_a + 1),$$

(1) *Sur les courbes et les surfaces intersections d'hyperquadriques* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1944, pp. 262-269).

d'où

$$p'_a = (n^2 - 9n + 22)2^{n-7} - 1.$$

D'autre part, le genre linéaire de F′ est

$$p'^{(1)} = (n - 5)^2 2^{n-4} + 1.$$

La surface F est régulière, donc il en est de même de la surface F′. Le genre géométrique de cette surface est égal au genre arithmétique et pour $n > 6$, le système canonique de F′ est infini.

Liége, le 30 janvier 1962.