Bulletin de la Classe des sciences

Surfaces des couples de points d'une courbe algébrique dont le diviseur de Severi est égal à deux

Lucien Godeaux

Résumé
Démonstration directe du fait que certaines surfaces représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe algébrique ont le diviseur de Severi égal à deux.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Surfaces des couples de points d'une courbe algébrique dont le diviseur de Severi est égal à deux,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Démonstration directe du fait que certaines surfaces représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe algébrique ont le diviseur de Severi égal à deux.

Dans une note en cours d'impression (1), nous avons établi le résultat suivant : Soient L une courbe algébrique contenant une involution γ du second ordre privée de points unis et L' une courbe image de cette involution. La surface F des couples de points non ordonnés de la courbe L contient une involution I du second ordre ayant une courbe unie : la courbe lieu des points représentant les couples de points de γ. Une surface F⁻, image de l'involution I, contient à son tour une involution I' du second ordre, mais privée de points unis, dont la surface F' des couples de points non ordonnés de la courbe L' est une image.

Nous avons établi autrefois (2) que si une surface algébrique est l'image d'une involution cyclique d'ordre p, privée de points unis,

(1) *Sur les surfaces représentant les couples de points de certaines courbes algébriques* (Revista de Matematica y Fisica teorica de la Universidad de Tucuman, tome XIV, publié en l'honneur du Prof. A. Terracini).

(2) *Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité* (Bulletin de l'Académie de Cracovie, 1914, pp. 362-368). — Voir aussi notre exposé sur *Les Involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*, Actualités scient., N° 270 (Paris, Hermann, 1935).

appartenant à une surface algébrique, le diviseur de Severi de la première surface est égal à p. Il en résulte que la surface F' a le diviseur de Severi $\sigma = 2$. Il nous a paru intéressant de montrer que ce résultat, que nous avons obtenu d'une manière détournée, peut s'établir directement et d'une manière fort simple. C'est l'objet de cette note, où nous raisonnerons sur des systèmes linéaires de courbes.

Remarquons en passant qu'une courbe de genre trois à modules généraux est l'image d'une involution du second ordre privée de points unis appartenant à une courbe de genre cinq. Par conséquent, la surface des couples de points non ordonnés d'une courbe de genre trois, à modules généraux, a le diviseur de Severi $\sigma = 2$.

Le même procédé permet de construire des surfaces dont le diviseur de Severi est supérieur à deux. Nous reviendrons prochainement sur cet objet.

1. Rappelons tout d'abord, d'une manière précise, le théorème dont il vient d'être question plus haut. Soient L une courbe algébrique de genre π' contenant une involution γ du second ordre privée de points unis, L' une courbe de genre π image de l'involution γ. Nous supposerons que les courbes L, L' ne sont pas hyperelliptiques. Désignons par F la surface des couples de points non ordonnés de la courbe L et par F' la surface analogue relative à la courbe L'.

A un point P' de F' correspondent sur L' deux points A'_1, A'_2 et à chacun de ces points, deux couples A_{11} et A_{12}, A_{21} et A_{22} de l'involution γ sur L. Désignons par P_1, P'_1, P_2, P'_2 les points de F qui représentent respectivement les couples $A_{11}A_{21}$, $A_{12}A_{22}$, $A_{11}A_{22}$, $A_{12}A_{21}$. Ces quatre points appartiennent à une involution J dont la surface F' est une image. D'autre part, le point P'_1 dépend rationnellement du point P_1 et inversement. Il existe donc une transformation birationnelle T de F en soi faisant correspondre P'_1 à P_1, P'_2 à P_2 et inversement.

La transformation T engendre sur F une involution du second ordre I ayant une courbe unie K_0 lieu des points correspondant aux couples de l'involution γ. Soit F'' une surface image de l'involution I. Aux groupes de J correspondent sur F'' des couples de points engendrant une involution I', privée de points unis et dont F' est une image.

Nous avons établi que les caractères de F^+ sont

$$p_g^+ = (\pi - 1)^2, \quad p_a^+ = \pi(\pi - 3) + 1,$$
$$p^{+(1)} = 2(\pi - 1)(4\pi - 9) + 1.$$

Rappelons que les caractères de la surface F' sont

$$p_g = \frac{1}{2}\pi(\pi - 1), \quad p_a = \frac{1}{2}\pi(\pi - 1) - \pi,$$

$$p^{(1)} = (\pi - 1)(4\pi - 9) + 1.$$

2. L'involution I' est engendrée par une transformation birationnelle involutive, T' de F^+ en soi.

Désignons par C' les courbes canoniques de F' et par C^+ celles de F^+. Le système canonique $|C^+|$ de F^+ est transformé en lui-même par T' et contient deux systèmes linéaires partiels $|C_0^+|$, $|C_1^+|$ appartenant à l'involution I', le premier étant le transformé du système canonique $|C'|$ de F'. Le système $|C'|$ et par suite le système $|C_0^+|$ ayant la dimension $\frac{1}{2}\pi(\pi - 1) - 1$, le système $|C_1^+|$ a la dimension $\frac{1}{2}\pi(\pi - 3)$.

Au système $|C_1|$ correspond sur F' un système linéaire $|C_1'|$ de dimension $\frac{1}{2}\pi(\pi - 3)$; ce système a évidemment le même degré et le même genre que $|C'|$ et on a, d'après la théorie des involutions,

$$|2\,C'| = |2\,C_1'|.$$

Si l'on ajoute à un système linéaire quelconque les courbes virtuelles $C' - C'$, $C' - C_1'$, on obtient deux systèmes linéaires distincts mais dont les doubles sont équivalents. La surface F' a donc bien le diviseur de Severi $\sigma = 2$.

3. Nous allons maintenant déterminer directement le diviseur de Severi de la surface F' sans utiliser l'existence de la surface F^+.

Considérons sur la courbe L′ une série linéaire $|A'|$ d'ordre n, non spéciale et par conséquent de dimension $r = n - \pi$. A cette série correspond sur L une série linéaire $|A|$, d'ordre $2n$, non spéciale, de dimension $2n - \pi' = 2(n - \pi) + 1 = 2r + 1$. Dans $|A|$, il existe deux séries linéaires partielles appartenant à l'involution γ : l'une $|A_0|$ correspond à $|A'|$, l'autre $|A_1|$ a la dimension r également. Il lui correspond sur L′ une série linéaire $|A'_1|$, d'ordre n et de dimension r.

Dans la série $|A|$, la transformation birationnelle de L en soi génératrice de γ agit comme une homographie harmonique. On peut par conséquent associer à la série $|A_0|$ le signe $+$ et à la série $|A_1|$ le signe $-$.

Dans la série $|2A|$, il y a également deux séries linéaires appartenant à l'involution γ. A l'une est affecté le signe $+$ et à l'autre le signe $-$. La première contient les groupes $2A_0$, $2A_1$.

On en conclut que sur la courbe L′, les séries $|A'|$, $|A'_1|$ sont distinctes, mais que leurs doubles $|2A'|$, $|2A'_1|$ appartiennent à une même série linéaire. Par contre, les séries $|2A'|$, $|A' + A'_1|$ sont distinctes.

4. Désignons par H les courbes de F′ qui représentent les couples de points de L′ dont l'un est fixe. Les courbes H forment un système continu, $\{H\}$, ∞^1, de degré un et d'indice deux. Ce système a pour enveloppe la courbe K qui représente les couples de points coïncidents de L′. Les courbes H et K sont de genre π.

Reprenons la série $|A'|$ sur L′ et soient $H_1, H_2, \ldots, H_n$ les courbes H qui correspondent aux points d'un groupe de la série. Le système linéaire

$$|G| = |H_1 + H_2 + \ldots + H_n|$$

a la dimension $\frac{1}{2}r(r + 3)$[1].

Soient d'autre part $H'_1, H'_2, \ldots, H'_n$ les courbes H qui correspondent aux points d'un groupe de la série $|A'_1|$. Les courbes

$$|G_1| = |H'_1 + H'_2 + \ldots + H'_n|$$

(1) Severi, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* (Memorie Accad. di Torino, 1903).

forment également un système linéaire de dimension $\frac{1}{2}r(r-3)$, distinct du précédent.

Considérons maintenant les courbes $\overline{H}_1, \overline{H}_2, \ldots, \overline{H}_{2n}$ qui correspondent à un groupe de la série $|2A|$. Parmi les courbes

$$\overline{H}_1 + \overline{H}_2 + \ldots + \overline{H}_{2n},$$

qui engendrent un système linéaire, se trouvent les courbes $2G$ et $2G_1$. On a donc

$$2G \equiv 2G_1.$$

En considérant les courbes virtuelles $G \quad G$, $G - G_1$ comme on l'a fait plus haut, on voit que le diviseur de Severi de la surface F' est $\sigma = 2$.

Si une courbe algébrique est l'image d'une involution du second ordre privée de points unis appartenant à une courbe algébrique, la surface des couples de points non ordonnés de la première courbe a le diviseur de Severi égal à deux.

5. En général la courbe L' est à modules particuliers, mais dans le cas $\pi = 3$, elle est à modules généraux.

Considérons dans un plan trois coniques

$$\varphi_1(x_0, x_1, x_2) = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0$$

n'ayant aucun point commun. La courbe de genre trois la plus générale

$$\varphi_2^2 - \varphi_1\varphi_3 = 0 \tag{1}$$

enveloppe du système de coniques

$$\lambda^2\varphi_1 + 2\lambda\varphi_2 + \varphi_3 = 0 \tag{2}$$

est à modules généraux.

Cette courbe est l'image d'une involution du second ordre γ engendrée par l'homographie harmonique

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_0 : x_1 : x_2 : -x_3 : -x_4$$

appartenant à la courbe

$$x_3^2 = \varphi_1, \quad x_3 x_4 = \varphi_2, \quad x_4^2 = \varphi_3.$$

Cette involution est privée de points unis et on peut donc appliquer le théorème précédent.

La surface des couples de points non ordonnés d'une courbe de genre trois a le diviseur de Severi égal à deux.

Les courbes canoniques C' de la surface F' sont actuellement de genre sept et on a $p_g = 3$, $p_a = 0$. La courbe C_1' telle que l'on ait

$$2C_1' \equiv 2C'$$

représente les couples de points des groupes de la série d'ordre quatre et de dimension un lieu des points de contact des coniques (2) avec la courbe (1).

Liège, le 19 avril 1962.