Bulletin de la Classe des sciences

Sur l'enveloppe de certaines suites de quadriques

Lucien Godeaux

Résumé
Démonstration nouvelle du théorème suivant lequel dans une suite de quadriques dépendant de deux paramètres et telle que deux quadriques consécutives se touchent en quatre points, ces points sont caractéristiques pour les deux quadriques.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur l'enveloppe de certaines suites de quadriques,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Démonstration nouvelle du théorème suivant lequel dans une suite de quadriques dépendant de deux paramètres et telle que deux quadriques consécutives se touchent en quatre points, ces points sont caractéristiques pour les deux quadriques.

Nous avons rencontré dans nos recherches de Géométrie projective différentielle, des suites de quadriques $\ldots, \Psi_{n-1}, \Psi_n, \Psi_{n+1}, \ldots$ dépendant de deux paramètres u, v telles que deux quadriques consécutives se touchent en quatre points. Nous avons démontré, par voie analytique, que ces quatre points de contact étaient caractéristiques pour les deux quadriques, l'enveloppe de celles-ci ayant une partie commune lieu de ces points [1]. Dans cette note, nous exposons une nouvelle démonstration de cette propriété, démonstration qui nous paraît plus simple que la précédente.

1. Considérons dans un espace projectif S_5 l'hyperquadrique Q de Klein dont les points représentent les droites d'un espace S_3. Soit dans S_5,

$$\ldots, X_{n-i}, \ldots, X_{n-1}, X_n, X_{n+1}, \ldots, X_{n+i}, \ldots \tag{L}$$

une suite de Laplace L, les variables étant u, v et chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u. Nous supposerons que les points de cette suite n'appartiennent pas en général à l'hyperquadrique Q.

---

[1] *Sur les lignes asymptotiques d'une surface et l'espace réglé* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1927, pp. 812-826, 1928, pp. 31-41). Voir aussi notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé*, Act. scient., n° 138 (Paris, Hermann, 1934).

Désignons par Y_n le pôle par rapport à Q de l'hyperplan $X_{n-2}X_{n-1}X_nX_{n+1}X_{n+2}$. On sait que le point Y_n décrit un réseau conjugué et qu'il définit par conséquent une suite de Laplace L',

$$\ldots,\ Y_{n-i},\ \ldots,\ Y_{n-1},\ Y_n,\ Y_{n+1},\ \ldots,\ Y_{n+i},\ \ldots, \qquad (L')$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des v.

Deux plans $X_{n-1}X_nX_{n+1}$, $Y_{n-1}Y_nY_{n+1}$ sont conjugués par rapport à Q. Désignons par γ_n, γ_n' les coniques suivant lesquelles les deux plans coupent respectivement l'hyperquadrique Q. On sait que les points des coniques γ_n, γ_n' représentent les deux systèmes de génératrices d'une quadrique Ψ_{n+1} de S_3. Nous avons ainsi dans S_3 une suite de quadriques

$$\ldots,\ \Psi_{n-i},\ \ldots,\ \Psi_{n-1},\ \Psi_n,\ \Psi_{n+1},\ \ldots,\ \Psi_{n+i},\ \ldots.$$

2. Considérons deux quadriques consécutives Ψ_{n-1}, Ψ_n de cette suite, quadriques que nous supposerons non dégénérées.

Soient C_1, C_2 les points de rencontre de la droite U_nU_{n+1} avec Q, D_1, D_2 ceux de la droite V_nV_{n-1}.

Les points C_1, C_2 appartiennent aux coniques γ_n, γ_{n+1} et il leur correspond dans S_3 deux droites c_1, c_2 communes aux quadriques Ψ_{n-1}, Ψ_n. De même, aux points D_1, D_2 correspondent deux droites d_1, d_2 communes aux deux quadriques Ψ_{n-1}, Ψ_n. Ces deux quadriques se touchent donc aux points c_1d_1,c_1d_2, c_2d_1, c_2d_2. Il s'agit de démontrer que ces points sont caractéristiques pour les deux quadriques, c'est-à-dire que lorsque u, v varient, les deux quadriques ont une enveloppe commune touchant les quadriques aux quatres points considérés.

Nous ferons la démonstration de ce fait pour le point c_1d_1.

Lorsque u varie, la droite U_nU_{n-1} engendre une développable, le plan tangent à celle-ci le long de cette droite passant par U_{n+2}, par conséquent la tangente en C_1 à la courbe u tracée sur la surface (C_1) est contenue dans ce plan. D'autre part, elle est tangente à Q, donc c'est la tangente en C_1 à la conique γ_{n+1}. Cela signifie que lorsque u varie la droite c_1, engendre une réglée $(c_1)_u$ touchant le long de c_1 la quadrique Ψ_n.

La tangente en C_1 à la courbe v tracée sur la surface (C_1) est tangente en ce point à la conique γ_n. Par conséquent, lorsque v varie, la droite c_1 engendre une réglée $(c_1)_v$ touchant la quadrique Ψ_{n-1} le long de d_1.

On démontre de même que lorsque v varie, la droite d_1 engendre une réglée $(d_1)_v$ touchant Ψ_n le long de d_1 et lorsque u varie, une réglée $(d_1)_u$ touchant la quadrique Ψ_{n-1} le long de d_1.

Il en résulte que lorsque u, v varient, les tangentes aux courbes u, v tracées sur la surface (c_1d_1) appartiennent aux plans tangents en ce point aux quadriques Ψ_{n-1}, Ψ_n, plans tangents qui sont confondus. Ces quadriques touchent donc la surface (c_1d_1) au point c_1d_1 et cette surface appartient à l'enveloppe des deux quadriques.

La même démonstration est valable pour les points c_1d_2, c_2d_1, c_2d_2.

Dans la suite de quadriques ..., Ψ_{n-1}, Ψ_n, Ψ_{n+1}, ..., deux quadriques consécutives se touchent en quatre points dont le lieu fait partie de l'enveloppe des deux quadriques.

Liège, le 24 novembre 1962.