Bulletin de la Classe des sciences

Remarque sur les variétés algébriques à trois dimensions dont la surface canonique est d'ordre zéro

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'une variété algébrique à trois dimensions ayant des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro, dont le diviseur de Severi est égal à deux.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Remarque sur les variétés algébriques à trois dimensions dont la surface canonique est d'ordre zéro,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction d'une variété algébrique à trois dimensions ayant des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro, dont le diviseur de Severi est égal à deux.

Dans une note antérieure [1], nous avons construit des surfaces algébriques dont le diviseur de Severi est $\sigma = 2$, comme intersections, par des espaces linéaires, de la variété des droites joignant les points de deux variétés de Veronese. D'une manière précise, soient Ω_1, Ω_2 deux variétés de Veronese, l'une représentant les hyperquadriques d'un espace linéaire à m dimensions, l'autre les hyperquadriques d'un espace linéaire à n dimensions. La variété Ω_1, d'ordre 2^m, appartient à un espace Σ_1 à $M = \frac{1}{2}m(m+3)$ dimensions et la variété Ω_2, d'ordre 2^n, appartient à un espace Σ_2 à $N = \frac{1}{2}n(n+3)$ dimensions. Si Σ_1 et Σ_2 n'ont aucun point commun, ils appartiennent à un espace linéaire à $M+N+1$ dimensions et les droites s'appuyant sur Ω_1 et Ω_2 forment une variété W_{m+n+1} à $m+n+1$ dimensions, d'ordre

[1] *Une famille de surfaces algébriques de diviseur deux* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, Cl. des Sciences, 1959, pp. 373-380).

2^{m+n}. Les sections de cette variété par des espaces linéaires à $M + N - m - n + 2$ dimensions sont des surfaces de diviseur $\sigma = 2$ si m et n sont au moins égaux à deux.

Les sections de la variété W_{m+n-1} par des espaces linéaires à $M + N - m - n + 3$ dimensions sont des variétés V_3 à trois dimensions dont le diviseur de Severi est $\sigma = 2$ si m et n sont au moins égaux à trois. Lorsque une de ces conditions n'est pas remplie, les variétés V_3 possèdent des points quadruples et leur étude doit être faite à part. C'est ainsi que si $m = n = 2$, la variété V_3 a comme sections hyperplanes des surfaces de genre zéro et de bigenre un ; elle possède huit points quadruples. Nous avons obtenu jadis un théorème général sur les variétés possédant cette propriété ([1]) et l'exemple que nous rencontrons ici nous a paru assez intéressant pour que nous lui consacrions une courte note ([2]). Le cas où $m = 3$, $n = 2$ sera considéré dans une note ultérieure.

Dans la présente note, nous étudions le cas $m = n = 3$, mais nous ferons remarquer que nos raisonnements s'étendent immédiatement au cas général où m et n sont supérieurs à trois. L'intérêt du cas étudié ici réside dans le fait suivant : La variété V_3 possède des surfaces canonique et pluricanoniques d'ordre zéro et a le diviseur $\sigma = 2$. Or, Severi a démontré qu'une surface algébrique ayant des courbes canonique et pluricanoniques d'ordre zéro a le diviseur $\sigma = 1$ ([3]). On trouve donc ici, comme dans tant d'autres questions, une différence dans le passage des surfaces aux variétés à trois dimensions.

1. Soient, dans un espace linéaire S_{19} à 19 dimensions, deux espaces linéaires Σ_1, Σ_2 à 9 dimensions ne se rencontrant pas et d'autre part, un espace linéaire S_7 à 7 dimensions contenant deux espaces linéaires σ_1, σ_2 à trois dimensions ne se rencontrant pas. Considérons, dans Σ_1, une variété de Veronese Ω_1 représen-

([1]) *Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces de genres zéro et de bigenre un* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1933, pp. 134-140).

([2]) Dans le Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège.

([3]) Severi, *La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique* (Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 1908, pp. 449-468).

tant les quadriques de l'espace σ_1 et dans Σ_2, une variété deVeronese Ω_2 représentant les quadriques de l'espace σ_2. Les variétés Ω_1, Ω_2, à trois dimensions, sont d'ordre huit.

A un point P_1 de Ω_1 correspond un point P_1' de σ_1 et à un point P_2 de Ω_2 correspond un point P_2' de σ_2. A la droite $g = P_1P_2$, correspond la droite $g' = P_1'P_2'$ et réciproquement. Donc à la variété W_7^{64} lieu des droites s'appuyant sur les variétés Ω_1, Ω_2 correspond la variété des droites s'appuyant sur σ_1, σ_2, c'est-à-dire tout l'espace S_7.

Désignons par $y_0, y_1, y_2, y_3, z_0, z_1, z_2, z_3$ les coordonnées des points de S_7 de telle sorte que $z_0 = z_1 = z_2 = z_3 = 0$ soient les équations de σ_1 et $y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$ celles de σ_2. En posant

$$Y_{ik} = y_i y_k = y_k y_i, \; Z_{ik} = z_i z_k = z_k z_i, \; (i, \; k = 0, \; 1, \; 2, \; 3),$$

on peut prendre pour équations de Ω_1 celles que l'on obtient en écrivant que la matrice (Y_{ik}) est de caractéristique un jointes à $Z_{ik} = 0$ et pour équations de Ω_2 celles que l'on obtient en écrivant que la matrice (Z_{ik}) est de caractéristique un jointes à $Y_{ik} = 0$.

Les équations de la variété W_7^{64} seront donc obtenues en écrivant que les déterminants

$$\begin{vmatrix} Y_{00} & Y_{01} & Y_{02} & Y_{03} \\ Y_{02} & Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} \\ Y_{02} & Y_{12} & Y_{22} & Y_{23} \\ Y_{03} & Y_{13} & Y_{23} & Y_{33} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} Z_{00} & Z_{01} & Z_{02} & Z_{03} \\ Z_{02} & Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{02} & Z_{12} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{03} & Z_{13} & Z_{23} & Z_{33} \end{vmatrix} = 0$$

sont de caractéristique un.

Observons qu'à un point (Y, Z) de W_7^{64} correspondent dans S_7 les points (y, z) et $(y, -z)$. L'homographie biaxiale harmonique H, d'équations

$$y_i' : z_k' = y_i : -z_k, \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

dont les axes ponctuels sont les espaces σ_1, σ_2 engendre dans S_7 une involution I dont les couples sont représentés par la variété W_7^{64}.

Aux ∞^{19} hyperquadriques de S_7 ne passant pas par σ_1, σ_2,

$$\Sigma\lambda_{ik} y_i y_k + \Sigma\mu_{ik} z_i z_k = 0 \tag{1}$$

correspondent les sections hyperplanes

$$\Sigma\lambda_{ik}Y_{ik} + \Sigma\mu_{ik}Z_{ik} = 0$$

de W_7^{16}.

Il existe, dans S_7, ∞^{15} hyperquadriques passant par σ_1, σ_2 ; elles ont pour équation

$$\Sigma\lambda_{ik}y_i z_k = 0. \tag{2}$$

Une de ces hyperquadriques est rencontrée par six hyperquadriques du système (1) linéairement indépendantes en 2^7points, donc il lui correspond sur W_7^{16} une variété réglée à six dimensions, w_6^{64}, d'ordre 64. En élevant les deux membres de l'équation (2) au carré, on obtient

$$\Sigma\lambda_{ik}\lambda_{jk}Y_{ij}Z_{kk} = 0, \tag{3}$$

donc la variété w_6^{64} appartient à une hyperquadrique de S_{11} passant par les espaces Σ_1, Σ_2. L'hyperquadrique (3) touche la variété W_7^{64} le long de la variété w_6^{64} et passe d'ailleurs par les variétés Ω_1, Ω_2 qui sont octuples pour W_7^{64}.

2. Considérons dans l'espace S_7 la variété V_3^{16} à trois dimensions et d'ordre 16 intersection de quatre hyperquadriques ne passant pas par les espaces et dont nous écrirons les équations

$$\Sigma a_{ik}^{(r)}y_i y_k + \Sigma b_{ik}^{(r)}z_i z_k = 0, \qquad (r = 0, 1, 2, 3).$$

La variété V_3^{16} ne rencontre pas les espaces σ_1, σ_2 et est transformée en soi par l'homographie H. Celle-ci engendre donc sur la variété une involution I' privée de points unis.

L'image de l'involution I' sur la variété W_7^{64} est l'intersection de cette variété par les hyperplans

$$\Sigma a_{ik}^{(r)}Y_{ik} + \Sigma b_{ik}^{(r)}Z_{ik} = 0, \qquad (r = 0, 1, 2, 3),$$

c'est-à-dire une variété V_3^{64} située dans un espace linéaire S_{15} à quinze dimensions, intersection de ces quatre hyperplans. La variété V_3^{64} ne rencontre pas les variétés de Veronese Ω_1, Ω_2.

Une section hyperplane de la variété V_3^{64} est une surface G_0' intersection de quatre hyperquadriques dans un espace à six dimensions. On sait qu'une telle surface a pour courbes canoniques ses sections hyperplanes. La surface G_0' a donc les genres $p_a = p_g = 7$, $p^{(1)} = 17$.

On conclut de tout ceci que sur la variété V_3^{16} le système $|G'_0|$ des sections hyperplanes est son propre adjoint et que par conséquent *la surface canonique et les surfaces pluricanoniques de la variété* V_3^{16} *sont d'ordre zéro.*

On observera que la surface G'_0 n'appartient à l'involution I' que si son hyperplan passe par σ_1 ou par σ_2.

Considérons maintenant la section de V_3^{16} par une hyperquadrique du système (1). On obtient une surface F'_0 d'ordre 32 sur laquelle le système canonique est découpé par les hyperquadriques. Les genres F'_0 sont donc $p_a = p_g = 31$, $p^{(1)} = 129$. La surface F'_0 appartient à l'involution I' privée de points unis, dont la surface F_0 qui la représente sur la variété V_3^{64} a les genres $p_a = p_g = 15$, $p^{(1)} = 65$.

La surface F_0 est une section hyperplane de la variété V_3^{64} et puisque le système canonique de F'_0 est découpé par les hyperquadriques, celui de la surface F_0 est découpé par les hyperplans de S_{15}. En d'autres termes, le système $|F_0|$ des sections hyperplanes de V_3^{64} est son propre adjoint. Par suite, *la surface canonique et les surfaces pluricanoniques de* V_3^{64} *sont d'ordre zéro.*

Envisageons maintenant la section de la variété V_3^{16} par une hyperquadrique du système (2). C'est une surface F'_1 d'ordre 32 sur laquelle le système canonique est découpé par les hyperquadriques et qui a donc les genres $p_a = p_g = 31$, $p^{(1)} = 129$ comme les surfaces F'_0.

La surface F'_1 est transformée en soi par l'homographie H et ne contient aucun point uni de cette homographie. Il en résulte qu'à la surface F'_1 correspond sur V_3^{64} une surface F_1 de genres $p_a = p_g = 15$, $p^{(1)} = 65$, d'ordre 64.

D'autre part, il existe une hyperquadrique (3) touchant la variété V_3^{64} le long d'une surface F_1. On en conclut que l'on a

$$2F_0 \equiv 2F_1$$

et que *la variété* V_3^{64} *a le diviseur de Severi* $\sigma = 2$.

Le système $|F_1|$ a, comme le système $|F_0|$, la dimension 15.

Les intersections de deux surfaces F_0, ou de deux surfaces F_1, ou d'une surface F_0 et d'une surface F_1, sont des courbes de genre 65 et le système $|F_1|$ est également son propre adjoint.

3. Considérons une surface G_1' découpée sur V_3^{16} par un hyperplan passant par σ_1. C'est, comme la surface G_0' considérée plus haut, une surface dont les sections hyperplanes sont les courbes canoniques ($p_a = p_g = 7$, $p^{(1)} = 17$). La surface G_1' est transformée en soi par l'homographie H et contient donc une involution du second ordre privée de points unis. Il lui correspond donc, sur la variété V_3^{64} une surface G_1, d'ordre 32, de genres $p_a = p_g = 5$, $p^{(1)} = 9$. Cette surface appartient à un système linéaire $|G_1|$, de dimension trois, qui est son propre adjoint.

La section de V_3^{16} par un espace linéaire à cinq dimensions passant par σ_1 est une courbe de genre 17. Il lui correspond sur V_3^{64} une courbe d'ordre 16 et de genre neuf qui est une courbe canonique de chacune des surfaces G_1 qui la contient.

La courbe section de cinq hyperquadriques d'un espace linéaire à six dimensions étant de genre 49, les sections hyperplanes des surfaces G_1 sont de genre 25.

En considérant les sections de V_3^{16} par des hyperplans passant σ_2, on voit qu'il leur correspond sur V_3^{64} des surfaces G_2, d'ordre 32 et de genres $p_a = p_g = 5$, $p^{(1)} = 9$, à sections hyperplanes de genre 25, formant un système linéaire $|G_2|$, de dimension trois, qui est son propre adjoint.

Dans S_7, l'ensemble d'un hyperplan passant par σ_1 et d'un hyperplan passant par σ_2 est une hyperquadrique du système (2). On en déduit qu'il existe un hyperplan touchant la variété V_3^{64} le long d'une surface G_1 et un hyperplan la touchant suivant une surface G_2.

On a donc

$$G_1 + G_2 \equiv F_1,$$

$$F_0 \equiv 2G_1 \equiv 2G_2.$$

4. Aux sections de V_3^{16} par des cônes du second ordre de sommet σ_1 correspondent des sections hyperplanes de la variété V_3^{64} appartenant au système $|2G_1|$. On en conclut qu'une surface G_1 appartient à ∞^3 hyperplans coupant encore la variété suivant des surfaces G_1. Par conséquent une surfaces G_1 appartient à un espace S_{11} à onze dimensions. Il en est de même des surfaces G_2. Désignons par C_1 une courbe intersection de deux surfaces G_1. Par un espace linéaire à cinq dimensions contenant σ_1 dans S_7

passent ∞^6 hyperquadriques coniques de sommet σ_1, donc par la courbe C_1 passent sept sections hyperplanes de V_3^{64} linéairement indépendantes. La courbe C_1 appartient donc à un espace linéaire à huit dimensions. Il en résulte que les sections hyperplanes d'une courbe C_1 forment la série canonique de cette courbe.

Les courbes C_2, intersections de deux surfaces G_2, ont les mêmes propriétés.

Sur V_3^{16}, une surface G_1' et une surface G_2' se rencontrent suivant une courbe de genre 17, donc une surface G_1 et une surface G_2 sur V_3^{64} suivant une courbe de genre neuf. Cela résulte d'ailleurs du fait que les systèmes $|2G_1|$ et $|2G_2|$ coïncident et que par conséquent les courbes (G_1, G_1), (G_2, G_2), (G_1, G_2) ont le même genre.

Les systèmes $|G_1|$, $|G_2|$ ont le degré huit.

Liège, le 10 octobre 1962.