SULLE CONGRUENZE LINEARI DI CURVE PIANE DOTATE DI UNA SOLA CURVA SINGOLARE.

Memoria di **Luciano Godeaux** (Morlanwelz, Belgio).

Estratto dal tomo XXXIV (2° sem. 1912) dei ***Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.***
Adunanza del 26 maggio 1912.

In una Memoria pubblicata l'anno scorso [1]), ho dato un metodo elementare per determinare le congruenze lineari formate dalle coniche appoggiate in sei punti ad una curva gobba dello spazio, oppure in quattro punti sopra una curva ed in due punti sopra una altra curva dello spazio. Avevo detto, nell'introduzione di questa Memoria, che questo metodo potrebbe essere utilizzato per la determinazione delle congruenze lineari di curve piane d'ordine qualunque. In questo lavoro, io determino i varî tipi possibili di una congruenza lineare di curve piane d'ordine $m (> 1)$ e di genere $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, dotate di una sola curva singolare C, sotto l'ipotesi che le curve della congruenza che passano per un punto della curva C, non tocchino uno stesso piano tangente alla C nel punto considerato. Allora, mediante due teoremi del prof. Darboux, si dimostra che le curve della congruenza s'appoggiano in $m(m+1)$ punti sulla curva C. Poi, noi consideriamo la superficie F, luogo delle curve della congruenza di cui i piani passano per un punto qualunque dello spazio. La considerazione dell'intersezione di due superficie F, oppure dell'intersezione di una superficie F con una curva della congruenza, colla considerazione dei vari spezzamenti possibili della F, conduce alla determinazione proposta. Precisamente, noi abbiamo questo teorema:

Le congruenze lineari di curve piane d'ordine $m (> 1)$ e di genere $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, dotate di una sola curva singolare, sono formate dalle curve che s'appoggiano in $m(m+1)$ punti sopra:

1°) *una curva d'ordine m^2+m+1, base d'una rete di superficie d'ordine $m+1$ (due qualunque di queste superficie s'incontrano ulteriormente in una curva della congruenza), oppure sopra:*

2°) *una curva d'ordine m^2+m la quale, con una retta che l'incontra in $m(t+1)$ punti $(0 < t < m)$, è la base d'una rete di superficie d'ordine $m+1$ (due qualunque di queste superficie s'incontrano ulteriormente in una curva della congruenza), oppure sopra:*

[1]) L. Godeaux, *Recherches sur les systèmes de coniques de l'espace* [Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége, III^e^ série, t. IX (1911)].

3°) *una curva d'ordine otto e di genere tre dotata di due punti tripli* ($m = 2$), *oppure sopra:*

4°) *una curva razionale d'ordine sette, con due punti tripli ed una retta che l'incontra in quattro punti* ($m = 2$).

È chiaro che la seconda curva è un caso particolare della prima, e l'ultima un caso particolare della terza. Le congruenze di coniche ottenute facendo $m = 2$, sono state incontrate dal prof. MONTESANO [2]).

Il nostro metodo potrebbe anche essere utile nella ricerca delle congruenze lineari di curve piane dotate di più curve singolari. Basterebbe considerare i varî spezzamenti della superficie F relativi ai punti singolari della congruenza.

1. Consideriamo una congruenza lineare, irriducibile, Σ, formata di curve piane Γ, d'ordine $m (> 1)$ e di genere $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, vale a dire un sistema algebrico, doppiamente infinito, di curve Γ, tale che, per un punto qualunque dello spazio, passa generalmente una sola curva Γ.

Con ciò, non si esclude l'esistenza di punti particolari, che noi chiameremo *punti fondamentali,* ciascuno dei quali appartiene ad una semplice infinità di curve della congruenza. Per esempio, se tutte le curve di Σ s'appoggiano ad una curva, tutti i punti di questa curva sono fondamentali. Evidentemente, i punti fondamentali della congruenza Σ saranno al più ∞^1, ed allora questi punti formeranno alcune curve algebriche. Queste curve sono chiamate *curve fondamentali.*

Ma noi possiamo avere due specie di curve fondamentali. Noi chiameremo *curva singolare* una curva fondamentale tale che le curve Γ della congruenza Σ che passano per un punto di questa curva non sono in generale spezzate. Invece, una curva fondamentale sarà detta *curva eccezionale* se le curve di Σ che passano per un punto di questa curva sono spezzate. Allora, è necessario, perchè la congruenza sia irriducibile, che queste curve Γ siano spezzate in due parti, una delle quali è la curva fondamentale (eccezionale) considerata. Evidentemente, se la congruenza Σ ha una curva singolare, tutte le curve Γ di Σ s'appoggiano sopra questa curva.

Supponiamo che non esistono punti comuni a tutte le curve della congruenza Σ.

2. Una curva piana d'ordine m e di genere $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ può sempre essere considerata come l'intersezione d'un piano con una superficie d'ordine m dello spazio. Quindi la congruenza Σ potrà essere rappresentata mediante due equazioni algebriche

$$(1) \qquad f(x, y, z; a, b) = 0, \quad \varphi(x, y, z; a, b) = 0,$$

la prima d'ordine m, la seconda lineare nelle x, y, z; e dove a, b, sono due parametri essenziali.

[2]) D. MONTESANO, *Sui varii tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio* [Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Napoli), serie III, vol. I (1895), pp. 93-110, 155-181]. Vedere anche: D. MONTESANO, *Su le congruenze lineari di coniche nello spazio* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, serie II, vol. XXVI (1893), pp. 589-604].

Il prof. DARBOUX [3]) ha dimostrato che i punti focali della congruenza rappresentata mediante le equazioni (1), sono dati dall'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial a}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial b}-\frac{\partial f}{\partial b}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial a}=0.$$

Quindi, sopra una curva Γ della congruenza Σ, si trovano $m(m+1)$ punti focali. Ma per definizione, per un punto focale di una congruenza passano due curve infinitamente vicine. Ma essendo la congruenza Σ lineare, se per un punto dello spazio passa più di una curva Γ, ne passano una infinità ed il punto è fondamentale. Si conchiude che sopra una curva generica Γ si trovano $m(m+1)$ punti fondamentali. Quando la curva Γ varia nella Σ, questi $m(m+1)$ punti fondamentali descrivono una oppure più curve necessariamente singolari.

Si sa che il prof. DARBOUX [4]) ha stabilito che quando le curve di una congruenza incontrano una curva fissata C, i punti d'appoggio sono punti focali semplici (cioè da contare una sola volta), salvo quando queste curve toccano uno stesso piano tangente alla curva C nel punto considerato.

In questo lavoro, ci proponiamo di determinare quali sono i tipi possibili della congruenza Σ sotto l'ipotesi che esista una sola curva singolare C, d'ordine λ, tale che le curve Γ che passano per un punto qualunque di C, non toccano uno stesso piano tangente in questo punto alla curva C.

Allora, noi sappiamo che le curve Γ s'appoggiano in $m(m+1)$ punti sulla curva C, e che quindi si ha

$$\lambda \geqq m(m+1).$$

3. Supponiamo che la congruenza Σ sia di classe n, cioè che sia in generale n il numero delle curve Γ di Σ di cui i piani passano per una retta qualunque dello spazio.

Consideriamo la superficie F, luogo delle curve Γ di Σ di cui i piani passano per un punto fissato, P, non singolare. Questa superficie è d'ordine $nm+1$. Infatti, consideriamo una retta d che passi per P, d incontra la superficie fuori di P negli nm punti d'appoggio delle curve Γ di cui i piani contengono d. D'altra parte, P è semplice sulla superficie F, perchè per questo punto passa una sola curva Γ e perchè il piano di questa curva coincide col cono tangente alla F in P. Onde, la retta d incontra la superficie F in $nm+1$ punti.

La superficie F passerà un certo numero di volte, q, per la curva singolare C. Questo numero q sarà evidentemente eguale alla classe del cono luogo dei piani delle curve Γ che passano per un punto di C.

Avremo anche da considerare le superficie F relative ai punti singolari (punti di C). Una tale superficie potrebbe spezzarsi in due parti: una superficie F_1 luogo delle curve

[3]) G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal* (Paris, Gauthier-Villars), tome II (1889), chap. I, pp. 3-4.

[4]) Loc. cit. [3]).

Γ passanti per il punto singolare, ed una superficie F_2 luogo delle curve Γ di cui solamente i piani passano per il punto singolare considerato.

4. Adesso, consideriamo due superficie F, F', relative ai punti P, P', non singolari. L'intersezione di queste superficie sarà spezzata nella curva singolare C, nelle n curve Γ di cui i piani passano per i punti P, P', ed in qualche altra curva. Vogliamo mostrare che queste altre curve sono necessariamente rette.

Essendo D una di queste curve, per un punto di D passano due curve Γ, una sopra F, l'altra sopra F'. Quindi, la curva D sarà fondamentale. Ma i punti di D non possono essere singolari per ipotesi, donde le ∞^1 curve Γ passanti per un punto di D sono spezzate ed hanno necessariamente una parte fissa comune. E questa parte comune è precisamente D (perchè Σ è irriducibile). Potrebbe anzi accadere che la curva D sia una retta, la quale, contata m volte, forma una curva Γ.

Se una curva Γ si spezza, si spezza certo in due parti situate nello stesso piano; quindi la curva D devesi trovare in un piano passante per P ed in un piano passante per P'. Questi punti sono generici, onde D è una retta.

Con la definizione data nel n° 1, queste rette sono *rette eccezionali*. (Noi diamo dunque ancora il nome di retta eccezionale ad una retta, la quale, contata m volte, costituisce una curva Γ. Si vede che questa *convenzione* è logica).

L'intersezione di due superficie F è composta della curva singolare C, di n curve Γ e di qualche retta eccezionale.

5. Essendo q la moltiplicità della curva C per una superficie F, questa curva potrebbe contare $q^2 + t$ volte nella intersezione delle superficie F, F', essendo t un numero intero maggiore di zero. Allora, occorre necessariamente che almeno una falda φ di F tocchi una falda φ' di F' in tutti i punti di C. Allora, tutte le superficie F relative ai punti della retta PP' avranno una falda toccante φ' in tutti i punti di C. Queste superficie contengono tutte le curve di Σ, quindi quelle di queste curve che passano per un punto qualunque B di C toccheranno la falda φ', cioè il piano tangente alla φ' in B. Ma questo piano tocca la curva C in B, dunque l'ipotesi $t > 0$ non è lecita, e quindi $t = 0$.

Noi possiamo adesso scrivere due formule importanti. L'intersezione delle due superficie F, F' dà primieramente

$$(mn + 1)^2 = mn + \lambda q^2 + \rho, \tag{2}$$

essendo ρ un numero intero positivo oppure nullo, e precisamente positivo se esistono rette eccezionali nella congruenza Σ.

Consideriamo una curva Γ, non spezzata e non situata sulla superficie F. Generalmente, questa curva non sarà tangente alla superficie F in un punto di C. D'altra parte, questa curva non può incontrare F fuori della C, perchè se Γ incontra F in un punto fuori di C, per questo punto passeranno due curve di Σ, e questa cosa non è possibile. Noi abbiamo dunque

$$m(mn + 1) = m(m + 1)q,$$

oppure

$$mn + 1 = (m + 1)q. \tag{3}$$

Fra le equazioni (1) e (2), eliminiamo q; noi abbiamo

$$(mn + 1)^2[(m + 1)^2 - \lambda] = (mn + \rho)(m + 1)^2. \tag{4}$$

Il secondo membro è maggiore di zero, dunque la stessa cosa vale per il primo membro e noi abbiamo $\lambda < (m + 1)^2$. Quindi:

Se una congruenza lineare di curve piane d'ordine m e di genere $\frac{1}{2}(m - 1)(m - 2)$ possiede una sola curva singolare, l'ordine λ di questa curva è compreso fra $m(m + 1)$ ed $m(m + 2)$:

$$m(m + 1) \leqq \lambda \leqq m(m + 2).$$

6. Cerchiamo di risolvere le equazioni (1) e (2). A tale oggetto, poniamo

$$\lambda = m^2 + m + 1 + \mu,$$

essendo μ un numero intero maggiore di -2 e minore di m. La formula (3) diviene

$$(mn + 1)^2(m - \mu) = (mn + \rho)(m + 1)^2,$$

oppure

$$m^2 n^2 (m - \mu) - mn(m^2 + 2\mu + 1) + m - \mu - \rho(m + 1)^2 = 0.$$

Da questa, noi deduciamo il valore di n:

$$n = \frac{m^2 + 2\mu + 1 \pm (m + 1)\sqrt{(m - 1)^2 + 4\mu + 4\rho(m - \mu)}}{2m(m - \mu)}.$$

Scriveremo

$$(m - 1)^2 + 4\mu + 4\rho(m - \mu) = \zeta^2,$$

e cercheremo di esprimere che ζ è intero.

Della equazione precedente, noi deduciamo

$$\{\zeta - (m - 1)\}\{\zeta + (m - 1)\} = 4\mu + 4\rho(m - \mu).$$

Il primo membro deve essere multiplo di 4, quindi ognuno dei suoi fattori è multiplo di due e noi dobbiamo porre

$$\zeta - (m - 1) = 2\varepsilon,$$

essendo ε un numero intero positivo oppure nullo.

Allora si ha

$$n = \frac{m^2 + 2\mu + 1 \pm (m + 1)(2\varepsilon + m - 1)}{2m(m - \mu)}.$$

Se vale il segno $-$, noi abbiamo necessariamente $\varepsilon = 0$, $\mu = m - 1$, $n = 1$, e quindi $q = 1$, $m + \rho = 1$. Onde, il segno $+$ è il solo accettabile. Allora, noi abbiamo

$$n = \frac{m^2 + \mu + \varepsilon(m + 1)}{m(m - \mu)}.$$

Essendo n intero, $\varepsilon + \mu$ deve essere multiplo di m; quindi poniamo

$$\varepsilon + \mu = m\eta,$$

dove η è un intero positivo oppure nullo. Ne segue

$$n = \frac{m - \mu + \eta(m+1)}{m - \mu},$$

dunque $\eta(m+1)$ deve essere multiplo di $m - \mu$. Poniamo

$$(m+1)\eta = (m-\mu)\nu,$$

ν intero positivo oppure nullo. Allora, si ha

$$n = \nu + 1.$$

Dall'equazione (2), si ricava

$$q = 1 + \frac{m\nu}{m+1}.$$

Ma q è intero e m, $m+1$ non hanno fattori comuni, da cui si ha

$$\nu = (m+1)\sigma,$$

essendo σ intero positivo oppure nullo. Allora

$$n = (m+1)\sigma + 1, \quad q = m\sigma + 1.$$

Per avere il valore di ρ, osserviamo che si ha

$$\zeta = 2m(m-\mu)\sigma - 2\mu + m - 1.$$

Ma

$$\zeta^2 = \mu + \rho(m-\mu) + (m-1)^2,$$

quindi

$$\rho = m(m^2\sigma + m - 1)\sigma - \mu(m\sigma + 1)^2.$$

Le soluzioni intere, positive oppure nulle, delle equazioni

$$(mn+1)^2 = mn + (m^2 + m + 1 + \mu)q^2 + \rho,$$

$$mn + 1 = (m+1)q,$$

sono

$$n = (m+1)\sigma + 1, \quad q = m\sigma + 1,$$

$$\rho = m(m^2\sigma + m - 1)\sigma - \mu(m\sigma + 1)^2,$$

essendo σ un numero intero positivo o nullo.

7. Indichiamo con q_1 il numero delle curve Γ delle congruenze Σ passanti per due punti di C; con q_2 il numero delle curve Γ passanti per un punto di C e di cui i soli piani passano per un altro punto di C. Evidentemente, si ha

$$q_1 + q_2 = q. \tag{4}$$

Distinguiamo tre casi secondo che si ha $\mu = 1$, $\mu = 0$, $\mu > 0$.

1°) $\mu = -1$. Questa ipotesi dà necessariamente $\sigma = 0$. Basta dimostrare che se una congruenza Σ ha una sola curva singolare C d'ordine $m^2 + m$, si ha $q = n$ (perchè allora si ha $n = q = 1$, $\sigma = 0$).

Consideriamo un punto P di C ed una retta p la quale passa per questo punto. Se le n curve Γ di Σ di cui i piani passano per p, passano tutte per P, si ha $q = n$. Se questa ipotesi non è verificata, una curva Γ che non passa per P, ma di cui il piano passa per p, non ha più di $m^2 + m - 1$ punti *distinti* sulla C, e quindi, questa curva Γ tocca la C in un punto. Facendo allora variare P sulla C, noi vediamo che tutte le curve Γ di Σ toccano la C. Ma questa ipotesi non è accettabile, perchè allora ∞^1 delle curve Γ passanti per un punto qualunque di C toccherebbero la curva C e quindi un piano tangente a questa curva. Quindi, se $\mu = -1$, $\sigma = 0$.

2°) $\mu = 0$. Consideriamo due punti qualunque P, P' della curva C. Noi possiamo fare due ipotesi:

a) Le n curve Γ di Σ di cui i piani passano per la retta PP', passano tutte per il punto P (oppure P'). In questo caso, si ha

$$q_1 + q_2 = n = q,$$

cioè $\sigma = 0$.

b) Queste n curve Γ non passano tutte per il punto P (oppure per il punto P'). Allora, queste curve passano necessariamente almeno per uno dei punti P, P', perchè se non accade, tutte le curve Γ di Σ toccano la curva C, e questa cosa non è possibile. Noi abbiamo adunque

$$q_1 + 2q_2 = n.$$

Questa equazione, con la (4), dà

$$q_1 = (m-1)\sigma + 1, \quad q_2 = \sigma.$$

Passiamo al terzo caso:

3°) $\mu > 0$. La curva C, d'ordine $\lambda \geqq 8$ (perchè $\lambda > m^2 + m + 1$, $m > 1$) ha certo delle rette che l'incontrano in più di due punti. Consideriamo adunque una retta d la quale incontra C in k punti ($k > 2$). Allora, noi possiamo fare tre ipotesi:

a) Le n curve Γ di Σ di cui i piani passano per d, passano tutte per un punto comune alla d ed alla C. In questo caso, si ha $\sigma = 0$.

b) Esiste una coppia di punti comuni alla d ed alla C tali che ciascuna di queste n curve Γ passa almeno per uno dei punti della coppia. Allora si ha

$$q_1 = (m-1)\sigma + 1, \quad q_2 = \sigma.$$

c) Non si presenta nessuno dei casi precedenti. Allora, si ha

$$3q_1 + 3q_2 \leqq n,$$

cioè $3q \leqq n$. Da cui

$$3m\sigma + 3 \leqq (m+1)\sigma + 1.$$

Questa diseguaglianza non è possibile, perchè si ha $m > 1$, $\sigma \geqq 0$.

Noi vediamo così che si hanno due categorie di congruenze Σ. Noi chiameremo Σ_0 una congruenza Σ per la quale si ha $\sigma = 0$, e Σ_1 una Σ per la quale si ha $\sigma > 0$.

8. Studiamo la congruenza Σ_0. Noi abbiamo $n = q = 1$, $\rho = -\mu$. Ora, ρ è maggiore di zero oppure nullo, quindi si ha $\mu = 0$ oppure $\mu = -1$. Chiameremo ancora Σ_0 la congruenza per la quale si ha $\mu = 0$, e Σ_0' quella per la quale si ha $\mu = -1$.

Consideriamo dapprima la congruenza Σ_0. Questa congruenza è dunque formata dalle curve Γ d'ordine m e di genere $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ appoggiate in $m(m+1)$ punti ad una curva C d'ordine $m^2 + m + 1$. I piani delle curve Γ passano tutti per un punto O, il quale è certo singolare e quindi sulla curva C. Allora, si vede che una superficie F, d'ordine $m+1$, è il luogo delle curve Γ di cui i piani passano per una retta passante per O. Queste superficie formano dunque una rete, e due superficie di questa rete hanno ancora in comune una curva della congruenza.

Una tale congruenza esiste certo, perchè è facile darne le equazioni.

Indichiamo con (x_0, x_1, x_2, x_3) le coordinate omogenee d'un punto dello spazio, e poniamo simbolicamente

$$a_x \equiv a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \quad b_x \equiv \cdots .$$

Le equazioni

$$\left\| \begin{matrix} a_x^m & a'_x & A \\ b_x^m & b'_x & B \end{matrix} \right\| = 0,$$

dove A e B sono costanti, rappresentano una curva piana generale d'ordine m, intersezione della superficie

$$A b_x^m - B a_x^m = 0,$$

con il piano

$$A b'_x - B a'_x = 0.$$

Essendo $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ parametri omogenei, le equazioni

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 a_x^m + \alpha_2 b_x^m + \alpha_3 c_x^m & \alpha_1 a'_x + \alpha_2 b'_x + \alpha_3 c'_x & A \\ \alpha_1 d_x^m + \alpha_2 f_x^m + \alpha_3 g_x^m & \alpha_1 d'_x + \alpha_2 f'_x + \alpha_3 g'_x & B \end{matrix} \right\| = 0$$

rappresentano una congruenza lineare Σ_0. I piani delle curve di questa congruenza passano per il punto comune ai piani

$$A d'_x - B a'_x = 0, \quad A f'_x - B b'_x = 0, \quad A g'_x - B c'_x = 0.$$

La curva singolare è rappresentata dalle equazioni

$$\left\| \begin{matrix} A d'_x - B a'_x & A f'_x - B b'_x & A g'_x - B c'_x \\ A d_x^m - B a_x^m & A f_x^m - B b_x^m & A g_x^m + B c_x^m \end{matrix} \right\| = 0.$$

9. Consideriamo la congruenza Σ'_0, corrispondente all'ipotesi $n = q = 1$, $\mu = -1$, $\rho = 1$. Questa congruenza ha quindi una curva singolare d'ordine $m^2 + m$, una retta eccezionale d, ed è di classe uno. Le superficie F sono d'ordine $m+1$ e passano semplicemente per la curva C e la retta d.

La retta eccezionale d non può incontrare la C in $m^2 + m$ punti, perchè questa curva sarebbe piana. Perciò, la retta d, contata t volte $(0 < t < m)$, forma, con ∞^1 curve piane Γ_1 d'ordine $m - t$ di cui i piani passano per d, ∞^1 curve Γ di Σ'_0. Poichè la d è semplice per la superficie F, in un piano passante per la retta d non si trova che una sola curva Γ_1. Di più, se la retta d incontra in un certo numero θ di punti la C, le curve Γ_1 incontrano la stessa curva C in $m^2 + m - \theta$ punti.

Supponiamo che per un punto di d passino k curve Γ_1. Allora, queste curve Γ_1 generano una superficie Φ d'ordine $m - t + k$, e questa superficie avrà k-pla la retta d. Ma la curva C non può essere situata sopra una superficie d'ordine minore di $m+1$, perchè questa superficie sarebbe incontrata in $m(m+1)$ punti da una curva Γ e le curve Γ della Σ'_0 sarebbero quindi tutte sopra questa superficie. Onde, si ha

$$m - t + k \geqq m + 1.$$

D'altra parte, la superficie F relativa ad un punto di d contiene la Φ almeno come parte, quindi l'ordine di Φ è al più eguale ad $m + 1$. In forza della disuguaglianza di cui sopra, l'ordine $m - t + k$ di Φ è precisamente $m + 1$ e si ha $k = t + 1$.

La curva C è semplice per la superficie Φ, perchè altrimenti, la Φ conterrebbe tutte le curve Γ. Perciò, le curve Γ_1 non hanno punti multipli variabili sulla curva C, perchè per un teorema del prof. ENRIQUES [5]), le curve d'un fascio sopra una superficie non hanno punti multipli variabili fuori dei punti delle curve multiple di questa superficie. Una curva Γ_1 non può incontrare una superficie F fuori di C e di d, quindi si ha

$$m - t + m(m + 1) - \theta = (m - t)(m + 1)$$

e $\theta = m(t + 1)$. La retta eccezionale d incontra così la curva C in $m(t + 1)$ punti.

I piani delle curve della Σ'_0 passano per un punto fisso O, necessariamente situato sulla retta d. Le superficie F, d'ordine $m + 1$, formano una rete. Questa congruenza Σ'_0 non è quindi che un caso particolare di quella Σ_0 studiata di sopra. Per avere le equazioni della congruenza Σ'_0 basta porre nelle equazioni della congruenza Σ_0:

$$a_x^m \equiv a_x''^{m-t}(b'_x)^t, \quad d_x^m \equiv a_x''^{m-t}(f'_x)^t,$$
$$b_x^m \equiv b_x''^{m-t}(a'_x)^t, \quad f_x^m \equiv b_x''^{m-t}(d'_x)^t.$$

10. Essendo l'ipotesi $\sigma = 0$ (congruenze Σ_0) esaminata, supponiamo che si abbia $\sigma > 0$ (congruenze Σ_1) e consideriamo la superficie F relativa ad un punto P della curva C. Questa superficie F si spezza in due parti F_1, F_2: F_1 è il luogo delle curve Γ passanti per P e F_2 il luogo delle curve Γ di cui i soli piani passano per P.

Le curve Γ che generano F_1 sono situate nei piani tangenti ad un cono di classe $q = m\sigma + 1$, quindi la superficie F_1 è d'ordine $mq = m(m\sigma + 1)$. Di più, essa passa $q_1 = (m - 1)\sigma + 1$ volte per la curva C. Noi ne concludiamo che la superficie F_2 è d'ordine $m(m - q) + 1 = m\sigma + 1$ e passa $q_2 = \sigma$ volte per C.

Consideriamo una superficie F_2 ed una curva Γ la quale non si trovi sopra questa superficie. Questa curva Γ non può incontrare F_2 fuori di C, perchè, altrimenti, la congruenza non sarebbe lineare. Quindi, si ha

$$m(m\sigma + 1) = m(m + 1)\sigma$$

e $\sigma = 1$.

Due superficie F_2 hanno in comune, fuori della curva C, solamente le rette eccezionali, quindi

$$(m + 1)^2 = m^2 + m + 1 + \mu + \rho',$$

essendo ρ' un numero intero positivo oppure nullo.

11. Consideriamo una superficie F_2 e, sopra questa superficie, una curva Γ. Il piano di questa curva (d'ordine m) incontra ulteriormente la F_2 (d'ordine $m + 1$) in una retta a appoggiata necessariamente in $\mu + 1$ punti sopra la C, perchè questa curva

5) F. ENRIQUES, *Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche* [Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, serie III, tomo X (1896), pp. 1-81], p. 17.

(d'ordine $m^2 + m + 1 + \mu$) incontra Γ in $m^2 + m$ punti. Se esiste una retta eccezionale d, essa è necessariamente semplice per la superficie F_2, perchè, altrimenti, Γ incontrerebbe d ed allora, facendo variare F_2, si vedrebbe che tutte le curve della congruenza incontrerebbero d. Questa retta sarebbe allora singolare e questo non è possibile. Quindi ρ' non è altro che il numero delle rette eccezionali della congruenza Σ_1 (questo numero è $\rho' = m - \mu$). Si vede ancora che quando la superficie F_2 varia, varia anche la retta a, e questa retta incontra la curva C in $\mu + 1$ punti, ed incontra tutte le rette eccezionali di Σ_1.

Ora, noi abbiamo già dimostrato che quando si ha $\mu = -1$, si ha $\sigma = 0$. Qui è $\sigma > 0$, donde $\mu \geqq 0$. Se ne deduce subito che il numero delle rette eccezionali non può essere maggiore di due. Infatti, se $\mu \geqq 0$, le rette a incontrano sempre la curva C almeno in un punto. Se la congruenza Σ_1 possiede più di due rette eccezionali, le rette a (che incontrano tutte le rette eccezionali) formano una schiera rigata del secondo grado, e questa rigata contiene la curva C. Ma se C è sopra una quadrica, le curve Γ incontrano questa quadrica in $m(m+1) > 2m$ punti, e sono dunque sopra questa quadrica. Allora, la congruenza Σ_1 non esisterebbe più. Quindi, necessariamente, le rette eccezionali di Σ_1 non sono più di due e si ha $\rho' \leqq 2$, oppure $m - \mu \leqq 2$.

Richiamo che si ha

$$\rho = m(m^2 + m - 1)\sigma - \mu(m\sigma + 1)^2,$$

quindi adesso ($\sigma = 1$),

$$\rho = m(m^2 + m - 1) - \mu(m + 1)^2.$$

Esaminiamo le tre ipotesi possibili che dànno $m - \mu \leqq 2$.

a) $\mu = m$. Allora, ρ sarebbe negativo, cosa impossibile.

b) $\mu = m - 1$. Si ha $\rho = 1$ e la congruenza possiede una sola retta eccezionale, semplice per le superficie F.

c) $\mu = m - 2$. Si ha

$$\rho = m^2 + 2m + 2,$$

e la congruenza possiede due rette eccezionali.

Prima di esaurire i casi *b*), *c*), facciamo alcune osservazioni. Le superficie F_2, in numero semplicemente infinito, formano necessariamente un fascio e di più, le curve Γ situate sopra una di queste superficie, formano anch'esse un fascio, perchè, altrimenti, non sarebbe Σ_1 lineare. Sopra ogni superficie F_2 si trova quindi una sola retta a appoggiata in $\mu + 1$ sulla C ed in un punto sopra ogni retta eccezionale. Queste rette a generano una superficie rigata Δ di cui l'ordine non può essere minore di $m + 1$, perchè, altrimenti, tutte le curve della congruenza sarebbero sulla Δ.

Richiamiamo che la congruenza Σ_1 è di classe $n = m + 2$. Ora, i piani delle curve di Σ_1 sono tangenti alla rigata Δ; quindi la classe (eguale all'ordine) di questa rigata è un divisore di $m + 2$. Ma questa classe non può essere minore di $m + 1$ e dunque essa è $m + 2$. Di più, in un piano tangente alla Δ non si trova *generalmente* che una curva della congruenza Σ_1 (e quindi una sola retta di Δ). Noi diciamo generalmente, perchè vedremo che esistono piani che contengono più curve di Σ'_1 (e questi piani sono precisamente quelli che passano per una certa retta eccezionale).

Per maggior semplicità, noi chiameremo Σ_1 la congruenza che corrisponde all'ipotesi *b*), e Σ'_1 quella che corrisponde all'ipotesi *c*).

12. Cominciamo col determinare completamente la congruenza Σ_1. Richiamiamo che questa possiede una curva singolare C, d'ordine $m^2 + 2m$, ed una retta eccezionale d, semplice per le superficie F e F_2.

Poichè la retta eccezionale d è semplice per le superficie F, in un piano passante per d non si trova che una sola retta di Δ (fuori di d). Perciò, la retta d è una retta $(m + 1)$-pla di questa rigata Δ.

Allora, la superficie F, relativa ad un punto di d, è composta delle $m + 1$ superficie F_2 relative alle $m + 1$ rette di Δ passanti per il punto considerato. Perciò, non possono esistere curve (d'ordine minore di m) le quali, congiunte alla retta eccezionale d, diano curve della congruenza. (Infatti, queste curve genererebbero una superficie facente parte delle superficie F relative ai punti di d). Se ne conclude che la retta d incontra la curva C in $m(m + 1)$ punti e che, contata m volte, dà una curva della congruenza.

Il cono proiettante la curva C da un punto della retta d è d'ordine $m^2 + 2m$ e possiede $m + 1$ rette (di Δ) m-ple, ed una retta (d) $(m^2 + m)$-pla. D'altra parte, una retta multipla di questo cono incontra C almeno in due punti ed allora appartiene alla Δ. Il genere del cono è perciò quello di C, è quindi $\frac{1}{2}(m - 1)(m^2 - 2m - 2)$.

Consideriamo un punto comune alla retta d ed alla curva C, e supponiamo che questo punto è multiplo secondo i per la C. La superficie Δ non può avere generatrici multiple, quindi il cono proiettante C da questo punto è d'ordine $m^2 + 2m - i$ e possiede una retta (d) $(m^2 + m - i)$-pla, ed $m + 1$ rette $(m - 1)$-ple. Il suo genere deve essere eguale a quello di C, quindi si ha $i = m + 1$.

La curva C possiede quindi m punti multipli secondo $m + 1$ sulla retta d. Si vede facilmente che le sezioni di una superficie F_2 qualunque ottenute mediante piani passanti per d, passano per gli m punti multipli di C. Quindi, le superficie F_2 hanno questi punti doppî (non è possibile avere una molteplicità maggiore, perchè, in questo caso, la d sarebbe multipla per la F_2). Ma noi sappiamo che se due superficie hanno una retta comune ed un punto doppio sopra questa retta, queste superficie s'incontrano ulteriormente in una curva la quale ha un punto triplo nel punto doppio delle superficie. Se noi applichiamo questo risultato a due superficie F_2, noi abbiamo $m + 1 = 3$ e $m = 2$.

La congruenza Σ_1 è quindi il luogo delle coniche appoggiate in sei punti sopra una curva d'ordine otto e di genere tre, dotata di due punti tripli. Questa congruenza esiste, come l'ha mostrato il prof. MONTESANO.

13. Consideriamo adesso la congruenza Σ'_1, la quale possiede una curva singolare d'ordine $m^2 + 2m - 1$ e due rette eccezionali d_1, d_2.

Si ha $\rho = m^2 + 2m + 2$; è quindi certo che almeno una delle rette d_1, d_2 ha una molteplicità maggiore di uno per le superficie F. Supponiamo precisamente che la retta d_1 sia multipla secondo k per le superficie $F (k > 1)$, e che questa retta, contata t volte, formi, con ∞^1 curve Γ_1 d'ordine $m - t$, curve Γ della Σ'_1. Evidentemente, si ha $t < m$; perchè, altrimenti, la retta d_1 incontrerebbe C in $m^2 + m$ punti e si proverebbe facilmente che questa retta è semplice per le superficie F. Quindi, si ha $0 < t < m$.

In un piano passante per d_1 si trovano k curve Γ e quindi k rette (oltre d_1) della rigata Δ. Noi ne concludiamo che la retta d_1 è $(m - k + 2)$-pla per la Δ.

La retta d_1 è semplice per le superficie F_2, quindi un piano passante per d_1 conterrà una sola curva Γ_1 la quale non conterrà un punto comune a C ed a questo piano, fuori dei punti di d_1 (e precisamente questa Γ_1 non conterrà il punto di C al quale è relativa la F_2 contenente la Γ_1). Perciò, se la retta d_1 incontra la C in θ punti, per ognuno degli $m^2 + 2m - \theta - 1$ punti di C contenuti in un piano passante per d_1 (fuori di d_1) passano $k - 1$ curve Γ_1. Se ne conclude, che la superficie Φ_1, luogo delle curve Γ_1, passa almeno $k - 1$ volte per la C [e C sarebbe più che $(k - 1)$-pla per Φ_1 se tutte le curve Γ avessero punti multipli sulla C]. Indichiamo con φ l'ordine della superficie Φ_1. Le intersezioni di una Γ qualunque con Φ_1 sono tutte sulla C (perchè altrimenti la Σ'_1 non sarebbe lineare), quindi si ha

$$\varphi \geqq (m + 1)(k - 1).$$

D'altra parte, la superficie F relativa ad un punto di d_1 è composta di $m - k + 2$ superficie F_2 (corrispondenti alle $m - k + 2$ rette di Δ che passano per il punto considerato) e di una superficie, d'ordine $(m + 1)(k - 1)$, che contiene certo almeno come parte la superficie Φ_1. Quindi, si ha

$$\varphi \leqq (m + 1)(k - 1),$$

e precisamente, in forza dell'ultima disuguaglianza,

$$\varphi = (m + 1)(k - 1),$$

Si vede così che le curve Γ_1 generano una superficie Φ_1, d'ordine $(m + 1)(k - 1)$, che passa $k - 1$ volte per la curva C.

Una curva Γ_1 incontra la curva C in $m^2 + m - \theta$ punti. Essa non può incontrare una superficie F oppure una superficie F_2 (che non la contiene) fuori di C, onde si ha

$$m^2 + m - \theta + m - t = (m + 1)(m - t),$$

$$(m^2 + m - \theta)(m + 1) + k(m - t) = (m - t)(m + 1)^2.$$

Poichè t è minore di m, si deduce da queste equazioni:

$$\theta = m(t + 1), \quad k = m + 1.$$

Indichiamo con h la molteplicità della retta d_2 per le superficie F, si avrà

$$\rho = h^2 + k^2 = h^2 + (m + 1)^2 = m^2 + 2m + 1,$$

quindi $h = 1$. Allora, la retta d_2 sarà $(m + 1)$-pla per la rigata Δ e la superficie F, relativa a un punto di d_2, sarà spezzata in $m + 1$ superficie F_2. Se ne conclude che

d_2 incontra C in $m(m+1)$ punti e che, contata m volte, essa dà una curva Γ della congruenza Σ'_1.

Proiettando C da un punto di d_2, si ottiene un cono d'ordine m^2+2m-1, con $m+1$ rette $(m-1)$-ple ed una retta (m^2+m)-pla. Il genere di questo cono, e quindi quello della C, sarà $\frac{1}{2}(m^3+m^2-8m+4)$. Come all'ultimo numero, si dimostrerà che la curva C ha m punti $(m+1)$-pli sulla retta d_2, che questi punti sono doppî per le superficie F_2 e che si ha quindi $m=2$.

La congruenza Σ'_1 è il luogo delle coniche appoggiate in sei punti ad una curva razionale del settimo ordine, dotata di due punti tripli e d'una retta che l'incontra in quattro punti. Anche l'esistenza di questa congruenza è stata dimostrata dal prof. Montesano.

È quindi dimostrato completamente il nostro teorema.

Bologna, 24 Aprile 1912.

L. Godeaux.