GÉOMÉTRIE. — *Sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique.* Note de M. **Lucien Godeaux**, présentée par M. Émile Picard.

1. Soit F une surface algébrique possédant une involution I_p, d'ordre premier p, ∞^2, n'ayant qu'un nombre *fini* de points unis. Soit Φ une surface de S_r, d'ordre n, à sections hyperplanes de genre π, dépourvue de courbes exceptionnelles, dont les points et les groupes de I_p se correspondent birationnellement. J'ai démontré récemment (*Rendiconti della R. Accad. dei Lincei*, 1er sem. 1914) que *l'involution* I_p *est cyclique*, quelles que soient Φ et F.

Supposons actuellement que les genres linéaires $\pi^{(1)}$, $p^{(1)}$ respectivement de Φ, F, soient supérieurs à l'unité, et cherchons à déterminer les singularités de Φ aux points de diramation.

2. Soient $|\Gamma|$ le système des sections hyperplanes de Φ, $|C|$ le système correspondant sur F, P un point uni de I_p, P' le point de diramation correspondant sur Φ. Le point P, compté p fois, forme un groupe de I_p, puisque I_p est cyclique.

$|C|$ n'a pas de points-base, puisque $|\Gamma|$ en est dépourvu ; son degré est np, son genre $p(\pi - 1) + 1$ et sa dimension r ($|C|$ peut évidemment être incomplet).

Lorsque P est un point uni parfait, c'est-à-dire lorsque tout point infiniment voisin de P, compté p fois, forme un groupe de I_p, on a nécessairement $p = 2$. Pour le montrer, on considère les courbes C ayant un point p-uple en P et les courbes Γ correspondantes. Celles-ci ont certainement un point p-uple en P', puisque sur chacune des courbes C considérées, il y a p groupes de I_p infiniment voisins de P. Leur genre est donc au plus égal à $\pi - \frac{1}{2}p(p-1)$. D'autre part, ce genre, calculé au moyen de la formule de Zeuthen, est $\pi - p + 1$.

On a donc

$$\pi - p + 1 \leq \pi - \frac{1}{2}(p-1),$$

d'où

$$p = 2.$$

Lorsque P n'est pas un point uni parfait, il y a, dans le voisinage de P, deux points qui, comptés p fois, forment des groupes de I_p. Désignons par C_2 les courbes C ayant un point p-uple à tangentes variables en P, par Γ_2 les courbes correspondantes sur Φ. Le genre des courbes Γ_2, calculé par la formule de Zeuthen, est $\pi - 1 - \frac{1}{2}(p+1)$. p est donc impair. Donc :

Si $p=2$, et seulement dans ce cas, un point uni est un point uni parfait.

3. Supposons p impair et considérons les courbes C assujetties à la *seule* condition de passer par P. Soient C_1 ces courbes, Γ_1 les courbes correspondantes. Soient t_1, t_2 les tangentes à F, en P (supposé point simple de la surface, ce qui n'enlève rien à la généralité) contenant les points unis de I_p, infiniment voisins de P. On démontre que les courbes C_1 ont un point double ordinaire en P, dont les branches touchent respectivement t_1, t_2, et ont entre elles des contacts d'ordre $p-3$. Le point P′ est double pour Φ.

Considérons les courbes C_1 assujetties à toucher, en P, une tangente à F différente de t_1, t_2. Ces courbes ont nécessairement un point p-uple à tangentes variables en P, ce sont donc les courbes C_2. On en conclut que P est biplanaire et précisément composé d'un point double auquel font suite un certain nombre t de points doubles et $i(=0$ ou $1)$ point simple infiniment voisins successifs, ces $t+i$ points étant en ligne droite (c'est-à-dire communs à tous les Γ_2). La formule de Zeuthen donne $t=\frac{p-3}{2}$. La comparaison des degrés de $|\Gamma_2|$ et $|C_2|$ donne $i=1$, donc :

En un point de diramation, Φ possède un point double biplanaire composé de $\frac{1}{2}(p-1)$ points doubles et d'un point simple infiniment voisins successifs et situés sur une même droite.

Lorsque $p=2$, on sait que P′ est un point double conique.

4. On peut obtenir une limite supérieure de p en fonction de $p^{(1)}$, $\pi^{(1)}$. On a précisément $p=\frac{p^{(1)}-1}{\pi^{(1)}-1}$. Il suffit d'utiliser le théorème de M. Enriques d'après lequel le système canonique de F contient les courbes correspondantes des courbes canoniques de Φ, augmentée de la courbe (actuellement d'ordre zéro) lieu des points unis de I_p.

5. Soit x le nombre de points unis de I_p. En un point de diramation, Φ possède une singularité abaissant la classe de cette surface de p unités,

quel que soit p (premier). L'invariant de Zeuthen-Segre de Φ, calculé au moyen d'un faisceau de courbes Γ, est donc égal à $m+px-n-4(\pi-1)$, m étant la classe de Φ. Celui de F, calculé au moyen du faisceau correspondant des C, est donc égal à $pm+x-pn-4p(\pi-1)-4$.

Si π_a, p_a sont respectivement les genres arithmétiques de Φ et de F, on a ainsi

$$12\pi_a-\pi^{(1)}+9=m+px-n-4(\pi-1),$$
$$12p_a-p^{(1)}+9=pm+x-pn-4p(\pi-1)-4.$$

Par suite, on a

$$x=\frac{12}{p^2-1}[p(\pi_a+1)-(p_a+1)].$$

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Sur la théorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles.* Note de M. **Gunther**, présentée par M. J. Hadamard.

1. Considérant les systèmes d'équations aux variables indépendantes $x_1, \ldots, x_m$ et aux fonctions inconnues $u_1, \ldots, u_k$, attribuons à chacune des quantités

$$(1)\qquad u_i,\quad i=1,2,\ldots,k,\quad p^{(i)}_{\alpha_1,0,\ldots,0},\quad p^{(i)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m},$$

où $p^{(i)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m}$ est la dérivée du u_i, pris α_1 fois par $x_1, \ldots, \alpha_m$ fois par x_m, respectivement le poids

$$c_i,\quad i=1,2,\ldots,k,\quad c_i+\alpha_1,\quad c_i+\alpha_1+\ldots+\alpha_n,$$

en supposant que $c_{i-1}\geqq c_i$.

Nous nous occuperons des systèmes S_1 d'équations, répondant aux conditions :

a. Le système S_1 est composé d'équations $f_j=0$, en nombre l_0, dans lesquelles les fonctions f sont indépendantes des quantités (1) ayant un poids supérieur à $n-1$, et d'équations $F_j=0$, en nombre l, dans lesquelles les fonctions F sont linéaires par rapport aux quantités (1) ayant le poids n;

b. Les équations $f_j=0$ sont d'une manière quelconque résolues par rapport à l_0 quantités (1) et les fonctions F sont indépendantes de ces l_0 quantités; les équations $F_j=0$ peuvent être résolues par rapport à l quantités (1) ayant le poids n.

c. Les équations, obtenues en différentiant les équations $f_j = 0$ et indépendantes des quantités (1) avec un poids supérieur à n, sont vérifiées par les valeurs des quantités (1), trouvées en résolvant le système S_1.

2. Formons toutes les dérivées d'ordre t des équations $F_j = 0$ et donnons aux équations obtenues le nom d'équations à poids $n+t$. Si le résultat de l'élimination, entre les équations à poids $n+t$, des quantités (1) qui ont le poids $n+t$ est, pour chaque valeur de t, identiquement vérifié par les valeurs des quantités (1), trouvées en résolvant les équations du système S_1 et les équations à poids moindre que $n+t$, nous dirons que le système S_1 est *préparé*.

Les systèmes, considérés par M. Riquier (1), prolongés jusqu'à la cote $\Delta+1$, où Δ est la cote maximum des équations du système, sont préparés, s'ils sont passifs.

3. Supposons que l'expression

$$T^{(t)} = \sum A^{(j)}_{\beta_1,\ldots,\beta_m} \frac{d^t F_j}{dx_1^{\beta_1}\ldots dx_m^{\beta_m}} = 0 \tag{2}$$

ne dépende que des quantités (1) ayant le poids $n+t$. Si le système S_1 est préparé, la relation

$$T^{(t)} = \sum A^{(j)}_{\beta_1,\ldots,\beta_m} \frac{d^t F_j}{dx_1^{\beta_1}\ldots dx_m^{\beta_m}} = 0 \tag{3}$$

doit être satisfaite par les valeurs des quantités (1) avec un poids moindre que $n+t$, trouvées en résolvant les équations du système S_1 et les équations à poids moindre que $n+t$.

Nous donnerons aux relations (3) le nom de *conditions de passivité d'ordre t*.

4. Supposons que

$$F_j = \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{\alpha} B^{(j,i)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} p^{(i)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} + \ldots \qquad (\alpha_1+\ldots+\alpha_m = n - c_i)$$

et formons les fonctions

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^{i=k} a_i \sum_{\alpha} B^{(j,i)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_m} \xi_1^{\alpha_1}, \ldots, \xi_m^{\alpha_m} = \sum_{i=1}^{i=k} a_i \varphi_i^{(j)}(\xi_1, \ldots, \xi_m), \tag{4}$$

(1) Riquier, *Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles*.

La correspondance Z fait correspondre à l'ensemble E du domaine $(0 \leqq y \leqq 1)$ un ensemble bien déterminé G contenu dans l'ensemble K et ayant la puissance du continu.

C'est cet ensemble G *qui est de première catégorie dans tout ensemble parfait* (*dense ou non*) *situé dans l'intervalle* $(0 \leqq x \leqq 1)$. Nous omettons la démonstration de ce fait qui est un peu longue pour mettre ici. Remarquons seulement qu'on peut toujours supposer l'ensemble G *non mesurable* (B). En effet, l'ensemble de tous ensembles mesurables (B) a la puissance du continu. D'autre part la puissance de G étant celle du continu, l'ensemble de tous sous-ensembles de G a une puissance supérieure à celle du continu. Donc, il existe un sous-ensemble H de G non mesurable (B) ayant la puissance du continu. Cet ensemble H satisfait, évidemment, à l'énoncé du théorème proposé.

Théorème III. — *Si la puissance du continu est aleph-un, il existe une fonction possédant la propriété nécessaire de M. Baire et non représentable analytiquement.*

Prenons, en effet, dans $(0 \leqq x \leqq 1)$ l'ensemble G du théorème II. La fonction $f(x)$ égale à 1 dans G et égale à zéro en dehors de G, est une fonction non représentable analytiquement; car l'ensemble G est non mesurable (B). D'autre part, quel que soit un ensemble parfait P (dense ou non) dans $(0 \leqq x \leqq 1)$, la fonction $f(x)$ est égale à zéro partout dans P, sauf un ensemble de première catégorie dans P. Par conséquent $f(x)$ est ponctuellement discontinue (même uniformément continue) sur tout ensemble parfait quand on néglige les ensembles de première catégorie par rapport à cet ensemble parfait. (C. Q. F. D.)

GÉOMÉTRIE. — *Sur les surfaces algebriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation.* Note de M. **Lucien Godeaux**, présentée par M. Émile Picard.

Soit Φ une surface algébrique de genre arithmétique $\pi_a \geqq -1$. Supposons que cette surface puisse être considérée comme une surface double ayant un nombre fini de points de diramation [1]. En d'autres termes, supposons qu'il existe, sur une certaine surface algébrique F, une involution I_2,

---

(1) Je traduis par *diramation* le mot italien *diramazione*.