DÉTERMINATION DES CONGRUENCES LINÉAIRES DE CUBIQUES GAUCHES S'APPUYANT EN CINQ POINTS SUR UNE CUBIQUE GAUCHE FIXE.

Par M. **Lucien Godeaux** (Liége).

Adunanza del 26 marzo 1911.

La détermination des différents types de congruences linéaires de cubiques gauches, se ramène, comme M. STUYVAERT l'a montré [1]), à la construction de réseaux de courbes planes de degré (effectif) un. Il peut arriver que cette détermination puisse se faire plus aisément lorsque l'on impose quelques conditions supplémentaires aux courbes de la congruence, par exemple si l'on assujetit ces courbes à s'appuyer en plusieurs points sur une courbe donnée (courbe singulière). C'est à un pareil problème que nous nous attacherons ici.

Les cubiques gauches s'appuyant en cinq points variables sur une cubique gauche fixe sont en nombre septuplement infini; nous déterminons ici toutes les congruences linéaires (c'est-à-dire d'ordre un) formées par des pareilles courbes. La méthode employée est très simple et peut du reste être appliquée à d'autres problèmes du même genre.

Pour chaque congruence à laquelle nous arrivons, nous donnons la configuration formée par les lignes singulières, mais nous n'excluons évidemment pas les cas où certaines de ces lignes se scindent en plusieurs courbes.

1. Soit Γ une cubique gauche fixe. Une quadrique Q passant par Γ et une surface cubique F passant également par Γ ont encore en commun une cubique gauche γ s'appuyant en cinq points sur Γ et dont la position dépend donc de sept paramètres.

Désignons par $|Q|$ le réseau formé par les quadriques circonscrites à Γ et par $|F|$ un système linéaire cinq fois infini formé par des surfaces cubiques contenant aussi la courbe Γ. On supposera de plus que le système $|F|$ ne possède pas de points-base en dehors de Γ.

Une cubique gauche γ, s'appuyant en cinq points sur la courbe Γ détermine une et une seule surface de chacun des systèmes $|Q|$, $|F|$ et, inversement, une quadrique de $|Q|$ et une surface cubique de $|F|$ déterminent une et une seule courbe γ.

Cette remarque élémentaire va nous permettre de déterminer toutes les congruences linéaires formées par des cubiques γ.

[1]) M. STUYVAERT, *Cinq études de Géométrie analytique* (Gand, Van Goethem, 1908), 2ème étude.

2. Considérons une congruence linéaire G formée par des cubiques gauches γ s'appuyant en cinq points sur la courbe Γ. Chacune des courbes de G détermine une et une seule surface de chacun des systèmes $|Q|$, $|F|$; il peut se faire que les quadriques Q (ou les surfaces cubiques F) déterminées par toutes les courbes de la congruence G forment un système doublement infini ou un système simplement infini. Nous sommes donc amenés à répartir les congruences telles que G en quatre catégories:

a) Congruences dont les courbes sont les intersections des quadriques d'un système simplement infini Θ_1 et des surfaces cubiques d'un système simplement infini Σ_1.

b) Congruences dont les courbes sont les intersections des quadriques d'un système simplement infini Θ_1 et des surfaces cubiques d'un système doublement infini Σ_2.

c) Congruences dont les courbes sont les intersections des quadriques d'un système infini Θ_2 (coïncident avec le réseau $|Q|$) et des surfaces cubiques d'un système simplement infini Σ_1.

d) Congruences dont les courbes sont les intersections des quadriques d'un système doublement infini (réseau) Θ_2 et des surfaces cubiques d'un système doublement infini Σ_2.

Nous allons examiner ces cas séparément. Nous désignerons respectivement par G_1, G_2, G_3, G_4, les congruences de chacune des catégories établies.

3. ***Congruences de la première catégorie.*** — Soit G_1 une congruence linéaire dont les courbes sont les intersections des quadriques d'un système Θ_1 et des surfaces cubiques d'un système Σ_1.

Si n_1, n_2 sont respectivement les indices des systèmes Θ_1, Σ_1, par un point P de l'espace passent $n_1 n_2$ courbes de G_1, par suite $n_1 = n_2 = 1$ et les systèmes Θ_1, Σ_1 sont des faisceaux.

La base du faisceau Θ_1 est constituée par une bisécante de Γ et par cette courbe; la base de Σ_1 est constituée par Γ et par une courbe du sixième ordre et de genre trois s'appuyant en huit points sur Γ. Il est facile de voir que toute courbe γ de G_1 s'appuye une fois sur la bisécante de Γ et quatre fois sur la courbe du sixième ordre.

Une congruence de la première catégorie est constituée par les cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur une cubique gauche Γ, *en quatre points sur une sextique gauche de genre trois s'appuyant huit fois sur* Γ, *et enfin en un point sur une bisécante de* Γ.

Une telle congruence a été rencontrée par M. Stuyvaert dans ses belles *Études de Géométrie analytique* [2]). J'ai démontré récemment qu'elle se ramène, par une transformation birationnelle convenable, à une congruence bilinéaire de droites [3]).

4. ***Congruences de la seconde catégorie.*** — Soit C_2 une congruence dont les éléments (courbes γ) sont les intersections des quadriques d'un système simplement infini Θ_1 et des surfaces cubiques d'un système doublement infini Σ_2. Chaque quadrique de Θ_1 porte un nombre simplement infini de cubiques gauches de G_2; donc, pour que cette

---

[2]) Loc. cit. [1]), pp. 112-113.

[3]) Godeaux, *Sur la quatrième congruence de cubiques gauches de* M. Stuyvaert [Nouvelles Annales de Mathématiques, IV[e] série, tome XI (1911), pp. 1-17].

congruence soit linéaire, il faut que Θ_1 soit un faisceau et que les courbes de G_2 situées sur une surface de ce faisceau forment elles-mêmes un faisceau.

Les surfaces F de Σ_2 qui déterminent les courbes de G_2 sur une quadrique Q de Θ_1 forment un faisceau, car Q ne peut pas faire partie de l'enveloppe du système ∞^1 formé par ces surfaces F. Ainsi, le système Σ_2 contient ∞^1 faisceaux de surfaces. Une quadrique de Θ_1 détermine un seul de ces faisceaux, mais un de ceux-ci peut être déterminé par un certain nombre ν de quadriques. Pour caractériser complètement le système Σ_2, il suffit de représenter les surfaces du système $|F|$ par les points d'un espace linéaire à cinq dimensions; aux surfaces de Σ_2 correspondent alors les points d'une surface réglée.

Passons maintenant à la détermination des points singuliers de la congruence G_2.

La base du faisceau Θ_1 est formée par Γ et une bisécante a de cette courbe; toute courbe de G_2 s'appuie évidemment une fois sur la droite a.

Les surfaces de Σ_2 déterminant sur une quadrique Q de Θ_1 les courbes de G_2, ont en commun une courbe gauche C du sixième ordre et de genre trois (en dehors de Γ). Cette courbe C rencontre la surface Q, en dehors de Γ, en quatre points qui sont évidemment singuliers pour G_2. Désignons par Φ la surface engendrée par les courbes C relatives à tous les faisceaux de surfaces F contenus dans Σ_2. La surface Φ a nécessairement un ordre multiple de trois, $3n$, et passe n fois par Γ.

Deux cas peuvent se présenter:

a) La courbe C ne s'appuie généralement pas sur la droite a.

b) La courbe C s'appuie constamment sur a (nécessairement en un seul point).

Dans le premier cas, le lieu des points de rencontre des quadriques de Θ_1 et des courbes C de Φ correspondantes est une courbe gauche (généralement) A d'ordre m s'appuyant p fois sur Γ et ayant n' points multiples d'ordre ν sur la droite a. Les nombres m, n', p, ν sont d'ailleurs liés par la relation

$$2m = n'\nu + p + 4,$$

exprimant que la courbe A rencontre une quadrique de Θ_1 en quatre points variables.

Une congruence de la seconde catégorie est constituée par les cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur une cubique gauche Γ, *en un point sur une bisécante* a *de* Γ *et en quatre points sur une courbe d'ordre* m *ayant* n' *points multiples d'ordre* ν *sur* a *et* $2m - n'\nu - 4$ *points sur* Γ.

Passons à l'examen du second cas *b*). La courbe que nous venons de désigner par A se décomposera en une courbe A' et en la droite a comptée ν fois. La courbe A' sera donc d'ordre $m - \nu$; elle aura encore p points sur la cubique gauche Γ.

La droite a appartient généralement comme droite simple à la surface Φ, car sur cette surface, les courbes C forment un faisceau, par suite A' s'appuie en $n + 1$ points sur a. Chacun de ces points d'appui est d'ailleurs multiple d'indice ν.

En exprimant que les quadriques de Θ_1 rencontrent encore la courbe A' en trois points en dehors de Γ et de a, on trouve la relation:

$$2m = (n + 3)\nu + p + 3.$$

Une congruence de la seconde catégorie est constituée par les cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur une cubique gauche Γ, *en un point sur une bisécante* a *de* Γ *et en trois points sur une courbe d'ordre* $m-\nu$ *s'appuyant en* $n+1$ *points multiples d'ordre* ν *sur* a *et en* $2m-(n+3)\nu-3$ *points sur* Γ. *De plus, les cubiques de la congruence passant par un point fixe de la droite* a *se distribuent en* ν *faisceaux situés chacun sur une quadrique passant par* Γ *et* a; *une pareille quadrique ne contient qu'un seul faisceau de courbes de la congruence.*

Une des congruences de M. STUYVAERT rentre dans ce dernier cas [4]).

5. ***Congruences de la troisième catégorie.*** — Soit G_3 une congruence linéaire dont les éléments se distribuent sur les surfaces cubique d'un système simplement infini Σ_1 et sur les quadriques d'un réseau Θ_2.

Il est d'abord évident que chaque surface de Σ_1 contient ∞^1 courbes de G_3 et que pour que la congruence soit linéaire, Σ_1 doit être un faisceau et que les courbes de G_3 situées sur l'une de ces surfaces forment aussi un faisceau. Ce faisceau ne peut être déterminé sur une surface donnée F de Σ_1 que par un faisceau de quadriques de Θ_2. Désignons par a la droite qui, avec Γ, complète la base de ce faisceau de quadriques. Le lieu de a est une surface réglée Ψ d'un certain ordre $2n$ passant n fois par Γ. Chaque surface du faisceau Σ_1 détermine une droite de Ψ, mais, inversement, une droite de Ψ peut provenir d'un certain nombre ν de surfaces de Σ_1. Une droite a de Ψ rencontre une des surfaces F de Σ_1 dont elle provient en un seul point en dehors de Γ; les cubiques de G_3 situées sur F passent évidemment toutes par ce point, qui est donc singulier par la congruence.

Le faisceau Σ_1 a pour base une courbe du neuvième ordre composée de la cubique Γ et d'une courbe gauche C du sixième ordre et du genre trois s'appuyant en huit points sur Γ. Toute courbe de G_3 s'appuie généralement en quatre points sur cette sextique C qui est donc une courbe singulière de la congruence.

Nous avons vu que, sur chaque surface F de Σ_1, se trouve un point singulier déterminé par la droite correspondante de Ψ. Désignons ce point par P; deux cas peuvent se présenter:

a) Le point P ne se trouve qu'exceptionnellement sur la courbe C.

b) Le point P se trouve toujours sur C.

Dans le premier cas, le lieu du point P est une certaine courbe A, d'un certain ordre m et s'appuyant p fois sur Γ, q fois sur C. La courbe A étant entièrement sur la surface Ψ, on a évidemment:

$$q = 12n - 8n = 4n.$$

Chacun des $4n$ points d'appui de A sur C est évidemment multiple d'indice ν pour A.

En exprimant qu'une surface de Σ_1 rencontre A en un seul point variable, on

[4]) GODEAUX, *Sur la cinquième congruence de cubiques gauches de* M. STUYVAERT [Bulletins de la classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique, année 1911, pp. 371-375].

trouve la relation:

$$3m = 4n\nu + p + 1.$$

Une congruence de la troisième catégorie est formée par l'ensemble des cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur une cubique gauche Γ, *en quatre points sur une courbe gauche* C *du sixième ordre et de genre trois s'appuyant huit fois sur* Γ *et en un point sur une courbe d'ordre* m *ayant* $4n$ *points multiples d'ordre* ν *sur* C *et* $3m - 4n\nu - 1$ *points sur* Γ.

Dans le second cas, le lieu de P est la courbe C, et l'ordre de la surface Ψ est nécessairement $2n = 8$. La réglée Ψ est alors de genre trois.

Une congruence de la troisième catégorie est formée par les cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur une cubique gauche Γ *et en quatre points sur une sextique de genre trois,* C, *s'appuyant huit fois sur* Γ, *mais de manière que les cubiques de la congruence passant par un point de* C *se distribuent en* ν *faisceaux situés chacun sur une surface cubique passant par* Γ *et* C, *une pareille surface ne contenant jamais qu'un faisceau de courbes de la congruence.*

J'étais déjà arrivé par une autre voie à ces conguences [5]).

6. *Congruences de la quatrième catégorie.* — Soit G_4 une congruence dont les courbes sont des intersections des quadriques d'un réseau Θ_2 et des surfaces cubiques d'un système doublement infini Σ_2.

Considérons un faisceau de quadriques de Θ_2. La base de ce faisceau est constituée par la courbe Γ et une de ses bisécantes a. Les surfaces de Σ_2 qui déterminent sur les quadriques de ce faisceau des courbes de G_4 sont évidemment en nombre simplement infini et forment un système Σ' d'un certain indice ν. Pour que la congruence G_4 soit d'ordre un, il faut que la droite a fasse $\nu - 1$ fois partie de l'enveloppe de Σ'; or si $\nu \geqq 2$, toutes les surfaces de Σ' contiendront la droite a et on n'aura plus une congruence de cubiques gauches. Par suite, on doit avoir $\nu = 1$.

Le système Σ_2 comprenant ∞^2 faisceaux Σ', ne peut être qu'un réseau.

Supposons qu'une quadrique de Θ_2 contient μ_1 courbes de G_4 (appartenant à un faisceau) et qu'une surface de Σ_2 en contienne μ_2 (appartenant aussi à un faisceau).

Reprenons l'examen du faisceau de quadriques passant par a et du faisceau Σ' déterminant sur ces quadriques les courbes de G_4. Par un point de a passe une surface de Σ', sur cette surface se trouvent μ_2 courbes de G_4 qui sont nécessairement marquées par des quadriques passant par a. Mais alors par le point choisi passent μ_2 courbes de la congruence et celle-ci étant linéaire, on a $\mu_2 = 1$. De même, $\mu_1 = 1$.

Nous voyons ainsi que la congruence G_4 est le lieu des intersections des éléments correspondant d'un réseau Θ^2 de quadriques homographique à un réseau de surfaces cubiques Σ_2.

Il peut se faire que par un point de l'espace il passe une infinité de quadriques de Θ_2 et de surfaces de Σ_2 correspondantes, ce point est singulier pour G_4. On peut déterminer le lieu de ces points de la manière suivante:

---

[5]) Loc. cit. [3]).

Soient

$$(\Theta_2) \qquad \lambda_1 a_x^2 + \lambda_2 b_x^2 + \lambda_3 c_x^2 = 0,$$

$$(\Sigma_2) \qquad \lambda_1 d_x^3 + \lambda_2 f_x^3 + \lambda_3 g_x^3 = 0,$$

les équations des réseaux Θ_2 et Σ_2. Le lieu des points singuliers est évidemment représenté par les équations

$$\left\| \begin{matrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ d_x^3 & f_x^3 & g_x^3 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Cette matrice représente une courbe du dix-neuvième ordre, mais tout point de la courbe Γ annule chaque élément de la matrice; donc Γ est comprise trois fois dans la courbe du dix-neuvième ordre et le lieu cherché est donc une courbe C du dixième ordre.

Les surfaces (d'ordre cinq) du réseau

$$\left| \begin{matrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 \\ d_x^3 & f_x^3 & g_x^3 \end{matrix} \right| = 0$$

passent simplement par C et doublement par Γ, deux de ces surfaces ont encore en commun une courbe de la congruence G_4; celle-ci s'appuie donc en cinq points sur C, et par suite C s'appuie en quinze points sur la courbe Γ.

La congruence de la quatrième catégorie est le lieu des cubiques gauches s'appuyant en cinq points sur une cubique gauche Γ *et en cinq points sur une courbe du dixième ordre s'appuyant quinze fois sur* Γ.

Liége, 1er février 1911.

LUCIEN GODEAUX.