SUR LES DÉTERMINANTS RÉCURRENTS DU PROF. E. PASCAL.

Par M. **Lucien Godeaux** (Liége).

Estratto dal tomo XXIX (1° sem. 1910) dei ***Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.***
Adunanza del 14 novembre 1909.

M. le prof. E. Pascal [1]) a étudié récemment, sous le nom de *déterminants récurrents,* des déterminants de la forme:

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & x & 0 & \dots & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{1,n-1} & a_{2,n-1} & a_{3,n-1} & a_{4,n-1} & \dots & x \\ a_{1,n} & a_{2,n} & a_{3,n} & a_{4,n} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Les nombres et pseudo-nombres eulériens, tangentiels et bernoulliens peuvent s'exprimer par des déterminants récurrents particuliers; ceux-ci ont été étudiés par MM. E. Pascal [2]) et L. Sinigallia [3]).

Dans cette Note, je me propose de rechercher un théorème d'addition pour les fonctions définies par un déterminant tel que (1), où les $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$ sont des nombres et x une variable réelle. Si $\mu_n(x)$ désigne un tel déterminant, on peut exprimer $\mu_n(x+y)$ en fonction linéaire des dérivées successives de $\mu_n(x)$, les coefficients étant des puissances de y. Comme x et y jouent le même rôle dans $\mu_n(x+y)$, on déduit une identité de la formule précédente. On peut exprimer $\mu_n(x)$ en fonction de $\mu_{n-1}(x), \dots, \mu_1(x)$, et en déduire des expressions des dérivées successives de $\mu_n(x)$ et, par suite, une expression nouvelle de $\mu_n(x+y)$. Mais cela entraîne des calculs très compliqués, calculs que nous n'avons pas exécutés.

Dans le cours de ce travail, la notation

$$\mu_n^{(i_1, i_2, \dots, i_k)}(x)$$

[1]) *I determinanti ricorrenti e le loro proprietà* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, serie II, vol. XL (1907), pp. 293-305].

[2]) *I determinanti ricorrenti e i nuovi numeri pseudo-euleriani* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, serie II, vol. XL (1907), pp. 461-475]; *I nuovi numeri pseudo-tangenziali* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXIII (1° semestre 1907), pp. 358-366].

[3]) *Sui nuovi numeri pseudo-euleriani del prof.* Pascal [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXIV (2° semestre 1907), pp. 223-228]; *Una estensione dei numeri bernoulliani* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXV (1° semestre 1908), pp. 20-35].

désignera un déterminant tel que (1), mais où l'on aura remplacé tous les termes de la $i_1^{\text{ème}}$ colonne par des zéros, sauf le $(i_1 - 1)^{\text{ième}}$ qui sera l'unité, et où l'on aura opéré de même sur les $i_2^{\text{ième}}, \ldots, i_k^{\text{ième}}$ colonnes.

1. Cherchons en premier lieu à exprimer les dérivées successives du déterminant $\mu_n(x)$. On sait que la dérivée d'un déterminant est égale à la somme des déterminants formés au moyen du premier, en substituant aux éléments d'une colonne les dérivées respectives de ces éléments. De là, on déduit

$$\frac{d\mu_n(x)}{dx} = \mu_n^{(2)}(x) + \mu_n^{(3)}(x) + \cdots + \mu_n^{(n)}(x) = \sum_{i=2}^{n} \mu_n^{(i)}(x).$$

En dérivant une seconde fois, les déterminants $\mu_n^{(i)}(x)$, $\mu_n^{(k)}(x)$ donneront tous deux des déterminants $\mu_n^{(i,k)}(x)$, donc

$$\frac{d^2\mu_n(x)}{dx^2} = 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{n-2} \mu_n^{(i,i+j)}(x).$$

La dérivée d'ordre $k+1$ donnera la formule

$$\frac{d^{k+1}\mu_n(x)}{dx^{k+1}} = (k+1)!\sum_{i=2}^{n}\sum_{j_1=1}^{n-2}\cdots\sum_{j_k=1}^{n-k-1} \mu_n^{(i,i+j_1,i+j_1+j_2,\ldots,i+j_1+\cdots+j_k)}(x). \tag{2}$$

2. Considérons le déterminant $\mu_n(x+y)$ et écrivons-le :

$$\begin{vmatrix}
a_{11} & x+y & 0 & 0 & \ldots 0 \\
a_{12} & a_{22}+0 & x+y & 0 & \ldots 0 \\
a_{13} & a_{23}+0 & a_{33}+0 & x+y & \ldots 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1,n-1} & a_{2,n-1}+0 & a_{3,n-1}+0 & a_{4,n-1}+0 & \ldots x+y \\
a_{1,n} & a_{2,n}+0 & a_{3,n}+0 & a_{4,n}+0 & \ldots a_{n,n}+0
\end{vmatrix}.$$

Par un procédé bien connu, on peut décomposer ce déterminant en d'autres du même ordre mais dont les éléments sont des monômes. On obtient

$$\begin{aligned}
\mu_n(x+y) = \mu_n(x) & \\
& + y\,[\mu_n^{(2)}(x) + \cdots + \mu_n^{(n)}(x)] \\
& + y^2[\mu_n^{(2,3)}(x) + \cdots + \mu_n^{(n-1,n)}(x)] \\
& + \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + y^{n-1}[\mu_n^{(2,3,\ldots,n)}(x)].
\end{aligned}$$

La formule (2) donne successivement :

$$\frac{d\mu_n(x)}{dx} = \mu_n^{(2)}(x) + \cdots + \mu_n^{(n)}(x),$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{d^2\mu_n(x)}{dx^2} = \mu_n^{(2,3)}(x) + \cdots + \mu_n^{(n-1,n)}(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{(n-1)!}\,\frac{d^{n-1}\mu_n(x)}{dx^{n-1}} = \mu_n^{(2,3,\ldots,n)}(x).$$

Des formules précédentes on déduit

$$\mu_n(x+y)=\mu_n(x)+y\frac{d\mu_n(x)}{dx}+\frac{1}{2}y^2\frac{d^2\mu_n(x)}{dx^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}y^{n-1}\frac{d^{n-1}\mu_n(x)}{dx^{n-1}}$$

ou

$$\mu_n(x+y)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i+1}{(i+1)!}y^i\frac{d^i\mu_n(x)}{dx^i}\ \text{[4]}. \tag{3}$$

La formule (3) constitue le théorème d'addition des fonctions $\mu_n(x)$. On peut en déduire d'autres formules intéressantes.

3. La formule (3) donne lieu à quelques identités:

En premier lieu, faisons $y=-x$ dans cette formule et remarquons que

$$\mu_n(0)=a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}.$$

On obtient

$$a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}=\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\frac{i+1}{(i+1)!}x^i\frac{d^i\mu_n(x)}{dx^i}. \tag{4}$$

En second lieu, permutons le rôle des variables x et y dans la formule (3), on a

$$\mu_n(x+y)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i+1}{(i+1)!}x^i\frac{d^i\mu_n(y)}{dy^i}.$$

En égalant les valeurs de $\mu_n(x+y)$ obtenues, on a l'identité

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i+1}{(i+1)!}y^i\frac{d^i\mu_n(x)}{dx^i}=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{i+1}{(i+1)!}x^i\frac{d^i\mu_n(y)}{dy^i}. \tag{5}$$

Pour $x+y=0$, la formule (5) donne une identité que l'on peut obtenir en remplaçant x par $-x$ dans la formule (4) et en égalant ensuite les deux valeurs du produit $a_{11}\ldots a_{nn}$. Cette identité est

$$\sum_{i=0}\frac{2i+1}{(2i+1)!}x^{2i}\left[\frac{d^{2i}\mu_n(x)}{dx^{2i}}-\frac{d^{2i}\mu_n(-x)}{dx^{2i}}\right]=\sum_{i=0}\frac{2i+2}{(2i+2)!}x^{2i+1}\left[\frac{d^{2i+1}\mu_n(x)}{dx^{2i+1}}+\frac{d^{2i+1}\mu_n(-x)}{dx^{2i+1}}\right],$$

les sommations s'étendant jusqu'au premier terme nul.

4. La formule (3) fournit des expressions de $\mu_n(x)+\mu_n(y)$ et de $\mu_n(x)-\mu_n(y)$.

Dans la formule (3), substituons $-y$ à y, il vient:

$$\mu_n(x-y)=\sum_{i=0}^{i=n-1}(-1)^i\frac{i+1}{(i+1)!}y^i\frac{d^i\mu_n(x)}{dx^i}. \tag{6}$$

Additionnons cette formule à la formule (3), on aura:

$$\mu_n(x+y)+\mu_n(x-y)=2\sum_{i=0}\frac{2i+1}{(2i+1)!}y^{2i}\frac{d^{2i}\mu_n(x)}{dx^{2i}},$$

la sommation s'étendant jusqu'au premier terme nul.

Dans la formule précédente, écrivons x' au lieu de $x+y$, et y' au lieu de $x-y$,

---

[4]) On a écrit $\frac{i+1}{(i+1)!}$ au lieu de $\frac{1}{i!}$ pour ne pas exclure le cas $i=0$.

il vient:

$$(7)\qquad \mu_n(x') + \mu_n(y') = 2 \sum_{i=0} \frac{2i+1}{(2i+1)!} \left[\frac{x'-y'}{2}\right]^{2i} \frac{d^{2i}\mu_n\left[\frac{1}{2}(x'+y')\right]}{d\left[\frac{1}{2}(x'+y')\right]^{2i}}.$$

De même, soustrayons la formule (6) de la formule (3), on a

$$\mu_n(x+y) - \mu_n(x-y) = 2\sum_{i=0} \frac{2i+2}{(2i+2)!} y^{2i+1} \frac{d^{2i+1}\mu_n(x)}{dx^{2i+1}},$$

et de là

$$(8)\qquad \mu_n(x) - \mu_n(y) = 2\sum_{i=0} \frac{2i+2}{(2i+2)!} \left[\frac{x-y}{2}\right]^{2i+1} \frac{d^{2i+1}\mu_n\left[\frac{1}{2}(x+y)\right]}{d\left[\frac{1}{2}(x+y)\right]^{2i+1}}.$$

Des formules (7) et (8), on déduit notamment que $\mu_n(x)+\mu_n(-x)$ et $\mu_n(x)-\mu_n(-x)$ sont des constantes.

Liége, 2 septembre 1909.

LUCIEN GODEAUX.