for,mule connue

$$u_i(x, y) = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^y dy_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{y-y_1}} e^{-\frac{(x-x_1)^2}{4(y-y_1)}} c_1(x_1, y_1)\, u_{i-1}(x_1, y_1)\, dx_1,$$

u_0 désignant encore la quantité (2).

Moyennant des hypothèses très générales sur l'ordre de grandeur de la quantité c_1 (et, par conséquent, de a, b, c) pour $x = \pm\infty$, la série

$$u = u_0 + u_1 + \ldots + u_i + \ldots,$$

dont les termes sont ainsi définis, est convergente : elle satisfait à l'équation (3′) et peut d'autre part s'écrire

$$u = u_0 + v,$$

v restant fini au voisinage de la droite $y = 0$ (et s'annulant même avec y).

Dans le cas particulier où c_1 est un polynome, la méthode précédente donne u sous la forme

$$u = u_0 P;$$

où P est une série de polynomes qu'on peut différencier terme à terme.

Si l'on revient à l'équation générale (3) en tenant compte du changement de variable qui a servi à passer de celle-ci à l'équation (3′), on verra que la « solution fondamentale » de cette équation a pour partie principale, au voisinage de $y = 0$, la quantité

$$\frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\frac{1}{4y}\left(\int_0^x \sqrt{-b}\,dx\right)^2},$$

et en diffère d'un terme additionnel continu et nul pour $y = 0$.

GÉOMÉTRIE. — *Sur les congruences linéaires de coniques.* Note de M. L. Godeaux, présentée par M. G. Humbert.

Désignons par *congruence de coniques* un système algébrique doublement infini de coniques de l'espace. L'ordre d'une congruence sera le nombre de ses coniques passant par un point arbitraire de l'espace; la classe sera le nombre de ses coniques dont les plans passent par une droite quelconque.

Les coniques s'appuyant en six points sur une courbe gauche C d'ordre $\lambda (\geqq 6)$ forment une congruence Γ; proposons-nous de déterminer C de telle manière que Γ soit linéaire (c'est-à-dire d'ordre 1).

La surface F, lieu des coniques de Γ dont les plans passent par un point fixe P, est d'ordre $2n+1$ ([1]), n étant la classe de Γ. Cette surface passe un certain nombre q de fois par la courbe C.

Une conique de Γ peut dégénérer en : 1° une sextisécante de la courbe C comptée deux fois; cette droite est simple pour la surface F; 2° une quadrisécante de C et une bisécante de cette même courbe, la quadrisécante est multiple d'ordre $\binom{\lambda-4}{2}$ pour F; 3° deux trisécantes de C ayant naturellement un point commun.

Deux surfaces analogues à F ont en commun, outre C et les quadrisécantes et sextisécantes de C, n coniques de Γ. Par suite, si C admet p_1 quadrisécantes et p_2 sextisécantes, on a

$$(2n+1)^2 = 2n + \lambda q^2 + p_1\binom{\lambda-4}{2}^2 + p_2. \tag{1}$$

Une courbe de la congruence n'appartenant pas à F rencontre cette surface seulement en des points de C, donc

$$2n+1 = 3q. \tag{2}$$

L'élimination de q entre les équations (1) et (2) montre que λ peut seulement avoir les valeurs 8, 7 et 6.

Par des raisonnements géométriques basés sur les limites supérieures des nombres p_1, p_2, j'établis le théorème suivant :

Si les coniques s'appuyant en six points sur une courbe gauche forment une congruence linéaire, la courbe est :

1° *D'ordre huit, de genre trois et dotée de deux points triples. Les plans des coniques de la congruence enveloppent la surface lieu des bisécantes de la courbe s'appuyant sur la droite qui joint les deux points triples, la congruence est donc de classe quatre.*

2° *D'ordre sept, rationnelle et dotée de deux points triples. Les plans des coniques de la congruence enveloppent la surface du quatrième ordre lieu des droites s'appuyant sur la courbe, sur la droite joignant les deux points triples et sur l'unique quadrisécante de la courbe. La classe est égale à quatre.*

([1]) *Su le congruenze lineari di coniche nello spazio* (*Rend. del R. Instituto Lombardo*, 2e série, t. XXVI, 1893).

3° *D'ordre sept et de genre cinq. Les plans des coniques passent tous par un point de la courbe et la congruence est de classe un.*

4° *D'ordre six et de genre deux. Les plans des coniques de la congruence passent par un même point de l'unique quadrisécante de la courbe et la congruence est de classe un.*

Les 2° et 4° apparaissent comme des cas particuliers des 1° et 3° respectivement. Les congruences ont d'ailleurs été rencontrées par M. Montesano [1], mais ce géomètre n'avait pas indiqué que c'étaient les seules congruences qui pouvaient se présenter.

En général, si les coniques s'appuyant en m_1 points sur une courbe C_1 d'ordre λ_1, ... et en m_k points sur une courbe C_k d'ordre λ_k

$$(m_1 + \ldots + m_k = 6)$$

forment une congruence linéaire, on a

$$(2n+1)^2 = 2n + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i q_i^2 + x,$$

$$2(2n+1) = \sum_{i=1}^{k} m_i q_i,$$

q_i désignant la multiplicité de C_i pour la surface lieu des coniques de la congruence, dont les plans passent par un point fixe, n désignant la classe de la congruence et x désignant les intersections absorbées par les droites s'appuyant en m_1 points sur C_1, ..., en m_k points sur C_k, et par les droites s'appuyant en quatre points sur l'ensemble des courbes $C_1, \ldots, C_k$, de manière à pouvoir former des coniques de la congruence avec des droites s'appuyant en deux points sur l'ensemble $C_1, \ldots, C_k$.

Les équations précédentes conduisent à l'énumération des différentes congruences linéaires de coniques. Ainsi, si $k = 2$, $m_1 = 2$, $m_2 = 4$, on a

1° $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4, 5$ ou 6.

2° $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$.

3° λ_1 quelconque, $\lambda_2 = 4$.

Les raisonnements précédents s'étendent sans peine aux cas où les coniques sont remplacées par des courbes planes d'ordres quelconques.

---

(1) *Su i varii tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio* (*Rendiconti della R. Accademia di Napoli*, 1895).