GÉOMÉTRIE. — *Sur les involutions appartenant à une surface de genres zéro et de bigenre un.* Note de M. L. **Godeaux**.

Soit F une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$. M. Enriques ([1]) a montré qu'une pareille surface possède une courbe bicanonique d'ordre zéro et a les genres $p_a = p_g = P_3 = P_5 = \ldots = 0$, $P_2 = P_4 = P_6 = \ldots = 1$, $p^{(1)} = 1$. Une involution appartenant à la surface F est rationnelle ($p_a = P_2 = 0$) ou a également les genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$. Dans ce dernier cas, l'involution ne possède qu'un nombre fini de coïncidences. Je démontre le théorème suivant :

Une involution I_n, *d'ordre n et de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, *appartenant à une surface* F *de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ *est :*

1° *Cyclique ou composée avec une involution cyclique ;*

2° *Son ordre n n'admet comme facteurs premiers que deux et trois.*

Pour démontrer la première partie de cet énoncé, je considère un système linéaire complet $|c|$, simple et de genre $\pi > 2$. Je suppose de plus que les courbes C ne sont généralement pas hyperelliptiques. Dans ce cas, il résulte des travaux de M. Enriques que $|c|$ a le degré $2\pi - 2$, la dimension $\pi - 1$ et est dépourvu de points-bases. Soient k les courbes qui correspondent aux C dans la transformation $(n-1, n-1)$ déterminée sur F pour I_n. J'établis que le système complet $|k|$ (continu) a la dimension $> \pi - 1$. Il résulte alors d'une remarque faite par MM. Enriques et Severi (dans leurs recherches sur les surfaces hyperelliptiques) ([2]) que si I_n n'est ni cyclique, ni composée avec une involution cyclique, les C passent pour des points de coïncidence de I_n. C'est ce qui n'a pas lieu puisque $|c|$ n'a pas de points-bases.

Pour démontrer la seconde partie de l'énoncé, il suffit de prouver que si l'on a une involution I_p, d'ordre premier p, de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$, sur F, p est égal à deux ou trois.

([1]) *Memorie della Società italiana delle Scienze*, 1906.

([2]) *Acta mathematica*, 1909, t. XXXII et XXXIII.

Indiquons par T la transformation de F en elle-même, de période p, birationnelle, qui engendre I_p. Considérons, ce qu'il est toujours possible de faire, un système complet $|A|$, de genre π, simple, sans points-bases, tel que T transforme une courbe A en une courbe A. Formons alors le système $|B| = |pA|$, *incomplet*, dont chaque courbe B est transformée en elle-même par T. Ce système $|B|$ a le degré $2p^2(\pi - 1)$, le genre $p^2(\pi - 1) + 1$ et la dimension $p(\pi - 1)$. Rapportons projectivement les B aux hyperplans d'un espace linéaire à $p(\pi - 1)$ dimensions. On obtient une surface Φ en correspondance $(1, p)$ avec F. Φ est donc une surface représentative de I_p, elle est d'ordre $2p(\pi - 1)$ et ses sections hyperplanes, Γ, sont de genre $p(\pi - 1) + 1$.

Soit P un point de coïncidence sur F, soit P′ le point de diramation correspondant sur Φ. En considérant les A passant par P, on forme des courbes B ayant en P un point p-uple à tangentes variables. Au moyen de la formule de Zeuthen, on établit que si $p = 2$, et seulement dans ce cas, la transformation T laisse invariants les points infiniment voisins de P.

On établit ensuite, toujours au moyen de la formule de Zeuthen, que les B passant pour P ont en ce point un point double dont les tangentes sont fixes si $p > 2$. En P′, Φ a un point double. Les courbes B assujetties à toucher une troisième direction en P, lorsque $p > 2$, acquièrent en ce point un point p-uple. On en déduit $p = 3$.

Si $p = 2$, P′ est un point double conique pour Φ; si $p = 3$, P′ est un point double biplanaire ordinaire.

En comparant les valeurs de l'invariant de Zeuthen-Segre de Φ et de F, on détermine le nombre de points de diramation de Φ. Ce nombre est *quatre* pour $p = 2$, *trois* pour $p = 3$.

Un raisonnement analogue conduit à cet autre théorème : *Si sur une surface de genres $p_2 = P_4 = 1$, on a une involution de genres $p_a = p_g = 0$, $P_6 = 1$ et d'ordre premier, cet ordre est égal à deux.*

(*Comptes rendus*, t. 156, p. 1306, séance du 28 avril 1913.)

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.
Paris. — Quai des Grands-Augustins, 55.
52142