Rapport sur le mémoire : Théorie des primitives aréolaires bornées de N. Teodorescu. Rapport des Commissaires

Théophile Henri Joseph Lepage, Fernand Simonart, Lucien Godeaux

RAPPORT SUR LE MÉMOIRE :

Théorie des primitives aréolaires bornées, de N. Teodorescu.

La notion de dérivée aréolaire d'une fonction continue $f(z)$ définie dans un domaine du plan complexe a été introduite par Pompeiu en 1912. L'Auteur de ce Mémoire l'utilisa dans sa thèse de doctorat en 1931 et en souligna toute l'importance pour l'étude d'une classe très étendue de fonctions qu'il dénomma les fonctions monogènes (α). Depuis lors on a spécialement considéré le cas (L. Bers, Vekua notamment) où la dérivée aréolaire $\varphi(z)$ existe et est continue en tous les points d'un domaine $\varDelta$. Dans ces conditions l'on a la formule de Green-Riemann :

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \iint \varphi(z)\; dz\; d\bar{z} \tag{1}$$

pour tout cycle rectifiable (γ) homologue à zéro, tracé dans le domaine $\varDelta$. En posant $dz = dx + idz$, d'où $dz \times d\bar{z} = \text{-}2i\; dx\; dy$, l'expression $\varphi(z)dz \times d\bar{z}$ s'écrit encore $2i\; \partial_{\bar{z}}\; f(z)dx \times dy$ où l'opérateur différentiel linéaire $\partial_{\bar{z}}$ se réduit à

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{2}$$

dans le cas particulier où les composantes réelles de $f(z)$ possèdent des dérivées partielles continues en x, y. Mais dans tous les cas où (1) a lieu, c'est-à-dire, en employant un autre langage, si la forme de Pfaff $f(z)\; dz$ possède dans $\varDelta$ une différentielle extérieure continue, la formule de Cauchy généralisée

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{\partial(z)dz}{z - \xi} - \frac{1}{\pi}\iint_{(\gamma)} \partial_{\bar{z}} f(z)\,\frac{dxdy}{z - \xi} \tag{3}$$

est fondamentale pour l'étude de la classe des fonctions $f(z)$ de ce type.

L'Auteur du mémoire considère le cas, très général, où (1) a lieu pour $\varphi(z)$ bornée et mesurable dans $\varDelta$. La fonction $f(z)$ est dite primitive aréolaire bornée dans $\varDelta$; $\varphi(z)$ étant presque partout la dérivée aréolaire de $f(z)$. Après avoir déterminé la condition grâce à laquelle $f(z)$ est une primitive, l'Auteur considère spécialement la décomposition de l'espace fonctionnel $f(z)$ en somme directe des deux espaces fonctionnels fournie par (3).

Nous estimons que ce Mémoire apporte une contribution intéressante et nous le proposons volontiers pour être inséré dans la Collection des Mémoires 8° de la Classe des Sciences de l'Académie.

TH. LEPAGE, F. SIMONART, L. GODEAUX.