Bulletin de la Classe des sciences

Construction d'une surface algébrique possédant une seule courbe canonique de genre cinq (Seconde note)

Lucien Godeaux

Résumé

Résumé. — Construction d'une surface algébrique double possédant une seule courbe canonique de genre cinq, de genres pa = pg = 1, p(1) = 5, P2 = 6.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Construction d'une surface algébrique possédant une seule courbe canonique de genre cinq,

(Seconde note),

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction d'une surface algébrique double possédant une seule courbe canonique de genre cinq, de genres $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 5$, $P_2 = 6$.

Dans une note antérieure [1], nous avons construit une surface bicanonique d'ordre 16 de l'espace à cinq dimensions possédant une seule courbe canonique de genre cinq. Dans cette seconde note, nous construisons une autre surface possédant les mêmes caractères, mais il s'agit cette fois d'une surface double dont le support est une surface de genres $p_a = P_4 = 1$, la courbe de diramation étant une section hyperplane de cette surface. Nous construisons également un modèle de cette surface dans un espace à trois dimensions.

1. Soit, dans un espace S_6 à six dimensions, un plan σ_1 et un espace σ_2 à trois dimensions ne se rencontrant pas. Nous désignerons par $y_0, y_1, y_2, z_0, z_1, z_2, z_3$ les coordonnées des points de S_6 et nous supposerons que les équations de σ_1 sont $z_0 = z_1 = z_2 = z_3 = 0$, celles de σ_2 étant $y_0 = y_1 = y_2 = 0$.

(1) Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1959, pp. 441-446.

Considérons dans S_6 les quatre hyperquadriques

$$\Sigma a_{ik}^{(r)} y_i y_k + \Sigma b_{jh}^{(r)} z_j z_h = 0,$$

$(i, k = 0, 1, 2 ; j, h = 0, 1, 2, 3 ; r = 0, 1, 2, 3)$.

Elles ont en commun une surface F, d'ordre 16, régulière, de genres $p_a = p_g = 7$, $p^{(1)} = 17$, dont le système canonique $|K|$ est celui des sections hyperplanes (¹).

La surface F est transformée en soi par l'homographie harmonique

$$H = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & -z_0 & -z_1 & -z_2 & -z_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix},$$

dont les axes ponctuels sont le plan σ_1 et l'espace σ_2. On peut d'ailleurs supposer sans restriction que la surface F ne rencontre ni σ_1, ni σ_2. Dans ces conditions, H engendre sur F une involution du second ordre I_2 privée de points unis.

Dans le système canonique $|K|$ de F, il y a deux systèmes linéaires $|K_0|$, $|K_1|$ appartenant à l'involution I_2. Le premier est découpé par les hyperplans

$$\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 = 0$$

passant par σ_2 et le second par les hyperplans

$$\mu_0 z_0 + \mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3 = 0$$

passant par σ_1.

Le système canonique de la surface image de l'involution I_2 correspond au système $|K_0|$ et cette surface a les genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 9$ (²).

2. Considérons maintenant l'homographie harmonique

$$H_1 = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & -y_2 & z_0 & z_1 & -z_2 & -z_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & z_0 & z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}.$$

(¹) *Sur les courbes et surfaces intersections complètes d'hyperquadriques* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1944, pp. 262-269) ; *Une famille de surfaces algébriques de diviseur deux* (Idem, 1959, pp. 373-380).

(²) *Construction d'une surface algébrique...* (loc. cit.).

Les homographies H, H_1 sont permutables et forment un groupe trirectangle.

Supposons que F soit transformée en soi par l'homographie H_1 et que ses équations soient donc de la forme

$$a_{00}^{(r)}y_0^2 + a_{11}^{(r)}y_1^2 + a_{22}^{(r)}y_2^2 + a_{12}^{(r)}y_1y_2 + b_{00}^{(r)}z_0^2$$
$$+ b_{11}^{(r)}z_1^2 + b_{01}^{(r)}z_0z_1 + b_{22}^{(r)}z_2^2 + b_{33}^{(r)}z_3^2 + b_{23}^{(r)}z_2z_3 = 0,$$
$$(r = 0, 1, 2, 3).$$

On peut toujours supposer sans restriction que F ne rencontre pas les axes ponctuels $y_0 = z_0 = z_1 = 0$ et $y_1 = y_2 = z_3 = z_4 = 0$ de l'homographie H_1. Dans ces conditions, les homographies H, H_1 engendrent sur F une involution du quatrième ordre I_4 privée de points unis.

Observons que les équations précédentes peuvent être résolues par rapport à y_0^2, y_1^2, y_2^2, y_1y_2 de sorte que F peut être représentée par les équations

$$\left.\begin{aligned} y_0^2 = \varphi_0(z_0, z_1) + \psi_0(z_2, z_3), \quad y_1^2 = \varphi_1 + \psi_1, \\ y_2^2 = \varphi_2 + \psi_2, \quad y_1y_2 = \varphi_3 + \psi_3, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

les φ étant des formes du second degré en z_0, z_1 et les ψ des formes du second degré en z_2, z_3.

3. Appelons I_2' l'involution du second ordre engendrée sur F par H_1 et F′ une surface qui la représente.

Puisque l'involution I_2' est privée de points unis, entre les genres arithmétiques $p_a = 7$ de F et p_a' de F′, nous avons la relation

$$p_a + 1 = 2(p_a' + 1),$$

d'où $p_a' = 3$. La surface F′ a donc les genres $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 9$.

Le système canonique $|K|$ de F contient deux systèmes linéaires appartenant à l'involution I_2' ; ils sont découpés par les hyperplans

$$\lambda_0 y_0 + \lambda_1 z_0 + \lambda_2 z_1 = 0,$$

$$\mu_0 y_1 + \mu_1 y_2 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3 = 0.$$

Aux courbes du premier de ces systèmes correspond sur F' le système canonique de cette surface.

A l'involution I_4 de F correspond sur F' une involution du second ordre I_2'' dont l'image est une surface Φ qui est évidemment l'image de l'involution I_4. L'involution I_2'' est privée de points unis.

Entre les genres arithmétiques $p_a = 3$ de F' et celui p_a' de Φ, on a la même relation que celle écrite plus haut, d'où $p_a' = 1$. La surface Φ a donc les genres $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 5$.

La courbe canonique de Φ correspond à l'unique courbe canonique K_{00}, découpée par l'hyperplan $y_0 = 0$, qui appartient à la fois aux involutions I_2 et I_2'.

Les autres systèmes linéaires appartenant au système canonique $|K|$ de F appartenant aux involutions I_2, I_2' donc à l'involution I_4 sont les faisceaux découpés par les hyperplans

$$\lambda_0 y_0 + \lambda_1 y_1 = 0, \quad \mu_0 z_0 + \mu_1 z_1 = 0, \qquad \nu_0 z_2 + \nu_1 z_3 = 0.$$

4. Le système bicanonique $|2K|$ de F est découpé par les hyperquadriques de S_6 ne contenant pas la surface. Le bigenre de F est donc $P_2 = 24$.

Dans le système $|2K|$, il existe quatre systèmes linéaires appartenant à l'involution I_4 ; ils sont découpés par les hyperquadriques

$$\begin{gathered} \lambda_{00} y_0^2 + \lambda_{11} y_1^2 + \lambda_{22} y_2^2 + \lambda_{12} y_1 y \\ + \mu_{00} z_0^2 + \mu_{11} z_1^2 + \mu_{01} z_0 z_1 + \mu_{22} z_2^2 + \mu_{33} z_3^2 + \mu_{23} z_2 z_3 = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

$$\lambda_{01} y_0 y_1 + \lambda_{02} y_0 y_2 + \mu_{02} z_0 z_2 + \mu_{03} z_0 z_3 + \mu_{12} z_1 z_2 + \mu_{13} z_1 z_3 = 0, \tag{2}$$

$$\lambda_{00} y_0 z_0 + \lambda_{01} y_0 z_1 + \lambda_{12} y_1 z_2 + \lambda_{13} y_1 z_3 + \lambda_{22} y_2 z_2 + \lambda_{23} y_2 z_3 = 0, \tag{3}$$

$$\lambda_{02} y_0 z_2 + \lambda_{03} y_0 z_3 + \lambda_{10} y_1 z_0 + \lambda_{11} y_1 z_1 + \lambda_{22} y_2 z_2 + \lambda_{23} y_2 z_3 = 0. \tag{4}$$

Le premier de ces systèmes contient la courbe découpée par l'hyperplan $y_0 = 0$, comptée deux fois, c'est-à-dire la courbe $2K_0$, c'est donc le transformé du système bicanonique de Φ.

Observons que du premier système, nous devons défalquer les hyperquadriques contenant F. Si nous tenons compte des équations de celles-ci, l'équation du premier système se réduit à

$$\mu_{00}' z_0^2 + \mu_{01}' z_0 z_1 + \mu_{11}' z_1^2 + \mu_{22}' z_2^2 + \mu_{23}' z_2 z_3 + \mu_{33}' z_3^2 = 0. \tag{1'}$$

Ce système a la dimension cinq, donc le bigenre de la surface Φ est $P_2 = 6$. On a d'ailleurs $P_2 = p_a + p^{(1)} = 1 + 5 = 6$.

5. Observons que les équations (2), (3), (4) représentent, dans l'hyperplan $y_0 = 0$, une surface F_0, d'ordre huit, de genres $p_a = P_4 = 1$. La première des équations (1) ne contenant que y_0^2, la surface F coïncide avec la surface double F_0, la courbe de diramation étant découpée par l'hyperquadrique

$$\varphi_0(z_{01}z_1) + \psi_0(z_2, z_3) = 0.$$

Pour obtenir les équations de la surface Φ, qui sera une surface double, rapportons projectivement les hyperquadriques (1') aux hyperplans d'un espace S_5 en leur faisant correspondre les hyperplans

$$\mu'_{00}Z_{00} + \mu'_{01}Z_{01} + \mu'_{11}Z_{11} + \mu'_{22}Z_{22} + \mu'_{23}Z_{23} + \mu'_{33}Z_{33} = 0$$

de cet espace.

Nous poserons

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i(z_0, z_1) &= \varphi'_i(Z_{00}, Z_{01}, Z_{11}), \\ \psi_i(z_2, z_3) &= \psi'_i(Z_{22}, Z_{23}, Z_{33}), \end{aligned}\right\} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

les φ' et les ψ' étant des formes linéaires.

Nous avons les équations

$$Z_{00}Z_{11} - Z_{01}^2 = 0, \quad (5) \qquad Z_{22}Z_{33} - Z_{23}^2 = 0, \tag{6}$$

$$(\varphi'_1 + \psi'_1)(\varphi'_2 + \psi'_2) - (\varphi'_3 + \psi'_3)^2 = 0. \tag{7}$$

Ce sont les équations de la surface F'_0 de genres $p_a = P_4 = 1$, qui représente l'involution du quatrième ordre engendrée sur F_0 par les homographies H, H_1. La surface Φ équivaut à la surface double de support F'_0, la courbe de diramation étant découpée par l'hyperplan

$$\varphi'_0 + \psi'_0 = 0.$$

Cette courbe de diramation coïncide avec la courbe canonique unique de Φ.

Observons que les homographies H, H_1, HH_1 engendrent sur F_0 des involutions du second ordre ayant chacune huit points unis, la première dans l'espace $y_1 = y_2 = 0$, la seconde dans l'espace $z_0 = z_1 = 0$, la troisième dans l'espace $z_2 = z_3 = 0$. Il en résulte que dans chacun des plans

$$\varphi_1' + \psi_1' = \varphi_2' + \psi_2' = \varphi_3' + \psi_3' = 0,$$

$$Z_{00} = Z_{01} = Z_{11} = 0, \quad Z_{22} = Z_{23} = Z_{33} = 0,$$

la surface F_0' possède quatre points doubles coniques, ce qui d'ailleurs résulte du fait que les équations (5), (6), (7) représentent trois cônes ayant respectivement ces plans pour sommets. Ces trois plans ne se rencontrent pas deux à deux.

6. On peut obtenir un modèle de la surface double Φ dans un espace à trois dimensions de la manière suivante :

Dans S_5, la droite $Z_{00} = Z_{01} = Z_{22} = Z_{23} = 0$ appartient à la variété V_3^4 intersection des cônes (5) et (6). En projetant cette variété de cette droite sur l'espace $Z_{11} = Z_{33} = 0$, à trois dimensions, on obtient une représentation point par point de cette variété sur cet espace.

Posons, pour abréger les notations,

$$x_0 = Z_{00}, \quad x_1 = Z_{01}, \quad x_2 = Z_{22}, \quad x_3 = Z_{23}.$$

Aux sections hyperplanes de V_3^4 correspondent dans l'espace S_3 considéré les surfaces cubiques

$$x_2(\lambda_{00}x_0^2 + \lambda_{01}x_0x_1 + \lambda_{11}x_1^2) + x_0(\lambda_{22}x_2^2 + \lambda_{23}x_2x_3 + \lambda_{33}x_3^2) = 0.$$

Ces surfaces touchent le plan $x_2 = 0$ le long de la droite $x_2 = x_3 = 0$, le plan $x_0 = 0$ le long de la droite $x_0 = x_1 = 0$ et passent par la droite $x_0 = x_2 = 0$.

Posons

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i'\left(Z_{00}, Z_{01}, \frac{Z_{01}^2}{Z_{00}}\right) &= \frac{1}{x_0}\,\varphi_i''(x_0^2, x_0x_1, x_1^2), \\ \psi_i'\left(Z_{22}, Z_{23}, \frac{Z_{23}^2}{Z_{22}}\right) &= \frac{1}{x_2}\,\psi_i''(x_2^2, x_2x_3, x_3^2). \end{aligned}\right| \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

L'équation de la transformée de F_0' est

$$(x_2\varphi_1'' + x_0\psi_1'')(x_2\varphi_2'' + x_0\psi_2'') - (x_2\varphi_3'' + x_0\psi_3'')^2 = 0.$$

C'est une surface du sixième ordre ayant les droites doubles tacnodales $x_0 = x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = 0$ et la droite double $x_0 = x_2 = 0$. Son adjointe est $x_0 x_2 = 0$, ce qui montre que cette surface a bien une courbe canonique d'ordre zéro.

La surface Φ équivaut à la surface précédente comptée deux fois, la courbe de diramation étant découpée, en dehors des droites doubles, par la surface cubique

$$x_2 \varphi_0'' + x_0 \psi_0'' = 0.$$

Cette courbe de diramation est la courbe canonique unique de Φ, tandis que le système bicanonique est formé des courbes, comptées deux fois, découpées par les surfaces cubiques homologues des sections hyperplanes de V_3^4.

Liège, le 21 septembre 1962.