RECHERCHES

SUR

LES SYSTÈMES DE CONIQUES DE L'ESPACE

PAR

Lucien GODEAUX

DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

BRUXELLES

HAYEZ, IMPRIMEUR DES ACADÉMIES ROYALES DE BELGIQUE

112, rue de Louvain, 112

—

1911

Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége,*
3e série, t. IX, 1911.

AVANT-PROPOS

L'étude des systèmes de coniques de l'espace se présente comme une généralisation de la Géométrie Réglée. Le premier problème qui se pose est celui de déterminer les différents types de congruences linéaires de coniques, problème qui est en quelque sorte l'extension de celui que Kümmer a résolu dans un mémoire classique (*). Ce problème avait déjà été abordé par M. Montesano, qui avait déterminé les types fondamentaux de congruences linéaires, et par M. Pieri, qui en avait déterminé les solutions quand la conique s'appuie en deux points sur une autre conique. Moi-même, je m'étais occupé de ce problème et l'avais ramené à un problème de géométrie plane en m'inspirant des recherches de M. Stuyvaert sur les congruences linéaires de cubiques gauches. Dans ce nouveau travail, je suis parvenu à déterminer toutes les congruences linéaires de coniques dont les courbes ou s'appuient en six points sur une seule courbe, ou s'appuient en quatre points sur une courbe et en deux points sur une seconde courbe, ou enfin passent par un point fixe et s'appuient en quatre points sur une courbe. Les congruences que j'ai rencontrées avaient du reste déjà été signalées par M. Montesano. Les autres cas qui peuvent se présenter (congruences dont les coniques s'ap-

(*) *Ueber die algebraischen Strahlensystem.* (Monatsberichte der Köng. Akad. Berlin, 1866.)

puient en trois points sur deux courbes, etc.) pourront se traiter de la même façon que les premiers. De plus, la méthode employée pourra être étendue à la détermination des congruences linéaires de courbes planes d'ordre quelconque, comme le lecteur s'en rendra facilement compte.

Résumons rapidement notre Mémoire : Un premier chapitre traite des recherches antérieures sur les systèmes de coniques de l'espace. Nous résumons les recherches de géométrie énumérative dans un premier paragraphe, les recherches sur les congruences et les complexes de coniques dans un second. Nous avons donné les formules établies par M. Severi, exprimant les conditions d'appui des coniques sur des courbes gauches : elles pourront servir à vérifier nos résultats.

Dans un second chapitre, je reprends une représentation analytique de la conique dont je m'étais déjà occupé antérieurement, puis je définis la géométrie de la conique dans l'espace au point de vue moderne.

Enfin, le troisième chapitre contient les recherches sur les congruences linéaires de coniques dont j'ai parlé au début de cet avant-propos.

Je ne puis terminer sans exprimer mes vifs remerciements à mon Maître, M. J. Neuberg, qui a bien voulu présenter ce travail à la Société royale des Sciences.

Liége, 26 avril 1911.

RECHERCHES

SUR

LES SYSTÈMES DE CONIQUES DE L'ESPACE (*)

CHAPITRE PREMIER

Aperçu des recherches antérieures.

§ 1. — *Les recherches de géométrie énumérative.*

1. Après avoir établi la théorie des systèmes de coniques satisfaisant à quatre conditions dans un plan, Chasles voulut construire une théorie analogue relative aux quadriques de l'espace. Les coniques de l'espace s'introduisirent dans cette théorie comme dégénérescences des quadriques, et c'est ce qui amena Chasles à s'occuper d'abord des systèmes de coniques de l'espace.

Huit conditions sont nécessaires pour déterminer une conique dans l'espace : trois de ces conditions pour fixer le plan de la conique, les cinq dernières pour fixer la conique dans son plan. Chasles (5) (**) a considéré les systèmes de coni-

(*) Travail présenté à l'Université de Liége comme thèse de doctorat (juillet 1911).

(**) Les nombres placés entre parenthèses renvoient à la liste bibliographique à la fin du chapitre.

ques satisfaisant à sept conditions (systèmes simplement infinis) et il a soupçonné le théorème suivant :

Etant donné un système de coniques Σ, simplement infini, désignons par μ, ν, ρ respectivement le nombre de coniques de Σ dont le plan passe par un point arbitraire, le nombre de coniques de Σ s'appuyant sur une droite quelconque et enfin le nombre de coniques de Σ touchant un plan arbitraire.

Le nombre des coniques de Σ satisfaisant à une huitième condition indépendante, sera égal à

$$\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\rho,$$

α, β, γ étant des nombres qui dépendent uniquement de la huitième condition.

Ce théorème fut démontré rigoureusement, sous quelques conditions restrictives, par Halphen (18) quelques années plus tard, et ce géomètre le généralisa de la manière suivante :

Soient Σ, Σ' deux systèmes de coniques respectivement n fois ($n < 8$) et $8 - n$ fois infinis. Supposons Σ et Σ' indépendants. *Le nombre de coniques appartenant à la fois à Σ et à Σ' sera égal à un polynome de degré $8 - n$ en μ, ν, ρ dont les coefficients seront des nombres dépendants uniquement de Σ' et où l'on remplacera chaque expression de la forme*

$$\mu^i\nu^k\rho^{8-n-i-k} \qquad (i \leqslant 3, 8 - n - i - k \geqslant 0)$$

par le nombre de coniques de Σ dont les plans passent par i points, qui s'appuient sur k droites et qui touchent $8 - n - i - k$ plans.

Rappelons brièvement le calcul symbolique utilisé par M. H. Schubert (30) dans ses recherches de géométrie énumérative, en nous limitant au cas où l'élément envisagé est la conique.

Toute condition à laquelle une conique de l'espace peut être assujettie est représentée par un symbole (lettre) ; le produit de deux symboles indique que l'on considère simultanément les conditions qu'ils représentent. Une condition est de dimension n quand il y a ∞^{8-n} coniques satisfaisant à cette condition ($8 \geqq n$).

Considérons un système de coniques, ∞^{8-n}, Σ, et une condition A de dimension n. Il y aura un nombre fini de coniques de Σ assujetties à la condition A ; ce nombre sera encore représenté par le symbole de la condition.

Si nous fixons l'attention sur un certain nombre de conditions $A_1, A_2, \ldots A_k$ de dimensions $\leq n$ et que, quel que soit le système Σ de dimension $8 - n$, on a toujours l'équation

$$F(A_1, A_2, \ldots, A_k) = 0,$$

on dit que l'équation lie les symboles envisagés. On remarquera que chaque terme de cette équation représente une condition de dimension n, produit de quelques-unes des conditions $A_1, A_2, \ldots, A_k$.

D'après ces conventions, le théorème de Halphen donne pour chaque condition A de dimension n

$$\alpha A = f(\mu, \nu, \rho),$$

où α est un nombre et $f(\mu, \nu, \rho)$ un polynome homogène de degré n.

Cela étant posé, adoptons les notations suivantes :

μ exprime que le plan d'une conique doit passer par un point ;

ν exprime qu'une conique doit s'appuyer sur une droite ;

ρ exprime qu'une conique doit toucher un plan ;

δ exprime qu'une conique dégénère en deux droites ;

η exprime qu'une conique (enveloppe de droites) dégénère en un segment de droite double ;

ρ' exprime qu'une tangente à une conique passe par un point ;

P exprime qu'une conique doit passer par un point ;

t exprime qu'une tangente à une conique doit faire partie d'un faisceau de rayons ;

T exprime qu'une conique doit toucher une droite.

La condition T est de dimension trois, les conditions P et t sont de dimension deux, les autres sont de dimension un.

M. Schubert (30) donne les formules suivantes :

$$
\begin{aligned}
P &= \mu\nu - 2\mu^2, \\
\rho' &= 2\mu, \\
t &= \mu\rho, \\
2\nu &= \rho + 2\mu + \eta, \\
2\rho &= \nu + \delta, \\
T &= \mu^2\rho - 2\mu^3.
\end{aligned}
$$

Signalons encore une formule établie plus tard par M. Schubert (31) :

$$2\nu^3 - 2\nu^2\rho + 3\nu\rho^2 - 2\rho^3 - 6\mu\nu^2 + 4\mu\rho\nu + 12\mu^2\nu - 8\mu^2\rho = 0.$$

L'exposition donnée par M. Schubert (30) est basée sur le principe de correspondance et sur le principe de la conservation du nombre.

Le théorème de Halphen ramène la détermination du nombre de coniques satisfaisant à huit conditions déterminées au calcul des nombres

$$\mu^i\nu^j\rho^k. \qquad (i + j + k = 8).$$

On a pour ces nombres les valeurs :

$$
\begin{array}{rrrr}
\mu^3\nu^5 = 1, & \mu^2\nu^6 = 8, & \mu\nu^7 = 34, & \nu^8 = 92, \\
\mu^3\nu^4\rho = 2, & \mu^2\nu^5\rho = 14, & \mu\nu^6\rho = 52, & \nu^7\rho = 116, \\
\mu^3\nu^3\rho^2 = 4, & \mu^2\nu^4\rho^2 = 24, & \mu\nu^5\rho^2 = 76, & \nu^6\rho^2 = 128, \\
\mu^3\nu^2\rho^3 = 4, & \mu^2\nu^3\rho^3 = 24, & \mu\nu^4\rho^3 = 72, & \nu^5\rho^3 = 104, \\
\mu^3\nu\rho^4 = 2, & \mu^2\nu^2\rho^4 = 16, & \mu\nu^3\rho^4 = 48, & \nu^4\rho^4 = 64, \\
\mu^3\rho^5 = 1, & \mu^2\nu\rho^5 = 8, & \mu\nu^2\rho^5 = 24, & \nu^3\rho^5 = 32, \\
 & \mu^2\rho^6 = 4, & \mu\nu\rho^6 = 12, & \nu^2\rho^6 = 16, \\
 & & \mu\rho^7 = 6, & \nu\rho^7 = 8, \\
 & & & \rho^8 = 4.
\end{array}
$$

La table précédente a été donnée par M. Schubert (30), quelques-uns des nombres qui y figurent étaient déjà connus. Plusieurs avaient même été calculés par les procédés de la géométrie analytique par MM. Lüroth (22 et 23) et Hierholzer (19).

Récemment, M. J. de Vries (8), en se basant sur le principe de la conservation du nombre, a calculé de nouveau le nombre ν^8. La même méthode a servi à une élève de M. J. de Vries, M^lle^ Dalhuisen (7), pour reconstruire toute la table précédente.

Signalons enfin que M. Schubert a calculé les nombres de coniques d'un espace linéaire à n dimensions dont les plans passent par des points, qui s'appuient sur des espaces linéaires et touchent d'autres espaces linéaires en nombre suffisant (32 et 33).

2. A part quelques résultats obtenus incidemment, on ne s'était pas encore occupé, avant 1900, de déterminer par la géométrie énumérative les nombres de coniques satisfaisant à huit conditions parmi lesquelles se trouvent des appuis sur des courbes données ou des contacts avec des courbes données. A cette époque, M. Berzolari (1) s'est proposé de déterminer le nombre de coniques passant par i points, s'appuyant en j points sur une ou plusieurs courbes et touchant k plans :

$$2i + j + k = 8, \qquad i \leqq 3.$$

Il résolut le problème dans un grand nombre de cas au moyen du principe de la conservation du nombre, mais sans donner de démonstrations. Ses recherches furent étendues à l'espace à n dimensions par un de ses élèves, M. Crepas (6).

M. Severi a abordé simultanément le même problème que M. Berzolari et il l'a résolu complètement.

Désignons par $\alpha_k\,(n, r)$ la condition pour une conique de s'appuyer en k points sur une courbe gauche d'ordre n et de rang r, et admettons que cette condition ne dépend que de l'ordre et du rang de la courbe. Dans un premier mémoire (35), M. Severi donne les formules suivantes :

$$\alpha_2(n, r) = \binom{n}{2}\nu^2 - \frac{1}{2}r\mu\nu + (n + r)\mu^2,$$

$$\alpha_3(n, r) = \binom{n}{3}\nu^3 - \frac{1}{2}r(n-2)\mu\nu^2 + \{n(n-1)$$
$$+ r(n-3)\}\mu^2\nu + 2r\mu^3,$$

$$\alpha_4(n, r) = \binom{n}{4}\nu^4 + \; nr - \frac{1}{2}r\binom{n}{2} - \frac{3}{2}r\}\mu\nu^3 + \{3\binom{n}{3} + r\binom{n}{2}$$
$$- 3rn + \frac{1}{4}\binom{r}{2} + \frac{39}{8}r \;\; \mu^2\nu^2 + \{\frac{3}{2}rn - \binom{r}{2} - 3r\}\mu^3\nu,$$

$$\alpha_5(n, r) = \binom{n}{5}\nu^5 + \{r\binom{n}{2} - \frac{1}{2}r\binom{n}{3} - \frac{3}{2}rn + 2r\}\mu\nu^4$$
$$+ \{4\binom{n}{4} - \binom{r}{2} - 3r\binom{n}{2} + r\binom{n}{3} + \frac{1}{4}n\binom{r}{2}$$
$$+ \frac{39}{8}rn - n - \frac{11}{2}r\}\mu^2\nu^3 + \{5\binom{r}{2} + r\binom{n}{2}$$
$$- n\binom{r}{2} - 2nr + 6n - \frac{9}{2}r\}\mu^3\nu^2,$$

$$\alpha_6(n, r) = \binom{n}{6}\nu^6 + \{r\binom{n}{3} - \frac{1}{2}r\binom{n}{4} - \frac{3}{2}r\binom{n}{2} + 2rn$$
$$- \frac{5}{2}r\}\mu\nu^5 + \{5\binom{n}{5} - 2\binom{n}{2} + \frac{5}{2}\binom{r}{2} + r\binom{n}{4}$$
$$- 3r\binom{n}{3} + \frac{1}{4}\binom{n}{2}\binom{r}{2} + \frac{39}{8}r\binom{n}{2} - n\binom{r}{2}$$
$$- \frac{11}{2}rn + 3n + \frac{15}{4}r\}\mu^2\nu^4 + \{12\binom{n}{2} - \frac{111}{8}\binom{r}{2}$$
$$- \frac{1}{8}\binom{r}{3} + \frac{1}{2}r\binom{n}{3} - r\binom{n}{2} - \binom{n}{2}\binom{r}{2} - 6nr$$
$$+ 5n\binom{r}{2} - 20n + \frac{471}{16}r\}\mu^3\nu^3,$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_7(n, r) = {} & \binom{n}{7}\nu^7 + \Big\{ r\binom{n}{4} - \frac{1}{2} r\binom{n}{5} - \frac{3}{2} r\binom{n}{3} + 2r\binom{n}{2} \\
& - \frac{5}{2} rn + 3r \Big\} \mu\nu^6 + \Big\{ 6\binom{n}{6} - 3\binom{n}{3} + 6\binom{n}{2} \\
& - 5\binom{r}{2} + r\binom{n}{5} - 3r\binom{n}{4} + \frac{1}{4}\binom{n}{3}\binom{r}{2} + \frac{39}{8} r\binom{n}{3} \\
& - \binom{n}{2}\binom{r}{2} - \frac{11}{2} r\binom{n}{2} + \frac{5}{2} n\binom{r}{2} + \frac{15}{4} rn - 6n \\
& + \frac{3}{2} r \Big\} \mu^2\nu^5 + \Big\{ 18\binom{n}{3} - 40\binom{n}{2} + \frac{113}{4}\binom{r}{2} + \frac{3}{4}\binom{r}{3} \\
& + \frac{511}{16} rn - \binom{n}{3}\binom{r}{2} - \frac{15}{2} r\binom{n}{2} + 5\binom{n}{2}\binom{r}{2} \\
& - \frac{111}{8} n\binom{r}{2} - \frac{1}{8} n\binom{r}{3} + 40n - \frac{633}{8} r \Big\} \mu^3\nu^4,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_8(n, r) = {} & 92\binom{n}{8} + 56\binom{n}{7} - 8\binom{n}{4} + 12\binom{n}{3} - 16\binom{n}{2} \\
& - 9r\binom{n}{6} + \frac{19}{2} r\binom{n}{5} - 11r\binom{n}{4} + 15r\binom{n}{3} \\
& - \frac{329}{16} r\binom{n}{2} + \frac{239}{8} rn - \frac{861}{16} r + \binom{r}{2}\binom{n}{4} \\
& - 3\binom{r}{2}\binom{n}{3} + \frac{49}{8}\binom{r}{2}\binom{n}{2} - \frac{47}{4}\binom{r}{2} n + \frac{189}{8}\binom{r}{2} \\
& - \frac{1}{8}\binom{r}{3}\binom{n}{2} + \frac{3}{4}\binom{r}{3} n - \frac{21}{8}\binom{r}{3} + 20n.
\end{aligned}
$$

Une autre expression de $\alpha_8(n, r)$, en fonction du genre p de la courbe, avait été communiquée par M. Tanturri à M. Severi (36) :

$$
\begin{aligned}
\alpha_8(n, 2n + 2p - 2) = {} & 92\binom{n-3}{8} + 206\binom{n-3}{7} \\
& + 150\binom{n-3}{6} + 35\binom{n-3}{5} - 3\binom{n-3}{5}(n-3)p \\
& + \binom{n-5}{3}(n-3)\binom{p}{2} - \binom{n-6}{2}\binom{p}{3}.
\end{aligned}
$$

Dénotons maintenant par $\beta_{ik\ldots l}\,(n,\ r)$ la condition pour qu'une conique ait avec une courbe d'ordre n et de rang r un contact d'indice $i-1$, un contact d'indice $k-1$, ..., un contact d'indice $l-1$. La seconde note de M. Severi (36) est relative à l'évaluation de cette condition. On a

$$\beta_2(n,r) = (\mu^2\rho - 2\mu^3)n + \left(\frac{1}{2}\rho\mu\nu - \mu^2\rho\right)r,$$

$$\beta_{21}(n,r) = \frac{1}{2}r(n-2)\rho\mu\nu^2 + \Big\{2\binom{n}{2} - (n-\ )r\Big\}\rho\mu^2\nu$$
$$+ 4\Big\{r - \binom{n}{2}\Big\}\mu^3\nu + 2r\mu^3\rho,$$

$$\beta_{211}(n,r) = \frac{1}{2}\binom{n-2}{2}r\rho\mu\nu^3 + \ 3\binom{n}{3} - 3n - r\binom{n}{2} + rn$$
$$- \frac{1}{2}\binom{r}{2} + \frac{9}{4}r\Big\}\rho\mu^2\nu^2 + \Big\{2\binom{r}{2} - 18r + 2rn$$
$$+ 12n\Big\}\rho\mu^3\nu + \Big\{6n - 6\binom{n}{3} + 4nr - 15r\Big\}\mu^2\nu^2,$$

$$\beta_{2111}(n,r) = \frac{1}{2}r\binom{n-2}{3}\rho\mu\nu^4 + \Big\{4\binom{n}{4} - r\binom{n}{3} + r\binom{n}{2} + \frac{9}{4}rn$$
$$- \frac{1}{2}n\binom{r}{2} - 6\binom{n}{2} + 8n + 2\binom{r}{2} - 11r\Big\}\rho\mu^2\nu^3$$
$$+ \Big\{24\binom{n}{2} - 36n + 2r\binom{n}{2} - 18rn + 60r$$
$$+ 2n\binom{r}{2} - 8\binom{r}{2}\Big\}\rho\mu^3\nu^2 + \Big\{12\binom{n}{2} - 8\binom{n}{4}$$
$$- 16n + 4r\binom{n}{2} - 15rn + 36r\Big\}\mu^3\nu^3,$$

$$\beta_{21111}(n,r) = \frac{1}{2}r\binom{n-2}{4}\rho\mu\nu^5 + \Big\{5\binom{n}{5} - 9\binom{n}{3} + 16\binom{n}{2}$$
$$- 15n - r\binom{n}{4} + r\binom{n}{3} + \frac{9}{4}r\binom{n}{2} - \frac{1}{2}\binom{r}{2}\binom{n}{2}$$

$$+ 2n\binom{r}{2} - 11rn - 5\binom{r}{2} + \frac{55}{2}r\Big\}\rho\mu^2\nu^4 + \Big\{36\binom{n}{3}$$

$$- 72\binom{n}{2} + 62n + 2r\binom{n}{3} - 18r\binom{n}{2} + \frac{123}{2}rn$$

$$+ 2\binom{r}{2}\binom{n}{2} - 8n\binom{r}{2} + \frac{3}{8}\binom{r}{3} + \frac{133}{8}\binom{r}{2}$$

$$- \frac{2117}{16}r\Big\}\rho\mu^3\nu^3 + \Big\{18\binom{n}{3} - 10\binom{n}{5} - 32\binom{n}{2}$$

$$+ 26n + 4r\binom{n}{3} - 15r\binom{n}{2} + 36rn - 67r\Big\}\mu^3\nu^4,$$

$$\beta_{211111}(n, r) = 72\binom{n}{6} - 48\binom{n}{4} + 72\binom{n}{3} - 120\binom{n}{2} + 168n$$

$$- \frac{9}{2}\binom{r}{3} + \frac{201}{2}\binom{r}{2} - \frac{1449}{4}r + \frac{3}{4}\binom{r}{3}n - 3\binom{r}{2}\binom{n}{3}$$

$$+ 12\binom{r}{2}\binom{n}{2} - \frac{147}{4}\binom{r}{2}n + 12r\binom{n}{5} - 30r\binom{n}{4}$$

$$+ \frac{117}{2}r\binom{n}{3} - 96r\binom{n}{2} + \frac{1347}{8}rn,$$

$$\beta_{22}(n, r) = \rho^2\mu^2\nu^2\Big\{\frac{1}{4}\binom{r}{2} - \frac{9}{8}r + n\Big\} + \rho^2\mu^3\nu\Big\{\frac{1}{2}rn$$

$$- \binom{r}{2} + 3r - 4n\Big\},$$

$$\beta_{221}(n, r) = \rho^2\mu^2\nu^3\Big\{\frac{1}{4}n\binom{r}{2} - \binom{r}{2} - \frac{9}{8}rn + 2\binom{n}{2} - 3n + \frac{9}{2}r\Big\}$$

$$+ \rho^2\mu^3\nu^2\Big\{3\binom{r}{2} - n\binom{r}{2} + r\binom{n}{2} - rn - 8\binom{n}{2}$$

$$+ 3rn + 6n = \frac{15}{2}r\Big\},$$

$$\beta_{2211}(n, r) = 24\binom{n}{3} - 96\binom{n}{2} + 192n + 2\binom{r}{2}\binom{n}{2}$$

$$- 23r\binom{n}{2} + 76rn - 12n\binom{r}{2} + 6r\binom{n}{3}$$

$$+ \frac{107}{2}\binom{r}{2} - \frac{3}{2}\binom{r}{3} - \frac{1107}{4}r.$$

En dehors de ces formules très générales de M. Severi, un autre théorème général du même genre a été obtenu par M. Stuyvaert (39 et 40) en s'appuyant sur un théorème classique de M. Le Paige donnant le nombre de groupes communs à deux involutions unicursales placées sur le même support.

Étant donné, dans l'espace, un ensemble de lignes unicursales d'ordres respectifs n, n′ ..., *de manière que l'on ait*

$$n + n' + \ldots = 6,$$

et si toutes ces lignes sont deux à deux sans points communs, les plans qui les rencontrent en six points d'une conique enveloppent une surface dont la classe est égale à

$$\nu = 8 - (n - i) - (n' - i) \ldots$$

En particulier, si l'on a deux lignes, une conique et une biquadratique gauche de seconde espèce, on a un résultat dû à M. R. Sturm (37).

M. Stuyvaert (39, 41) a montré comment la surélimination pouvait s'appliquer au problème qui nous occupe.

Il nous reste à signaler un dernier résultat dû à M. Bottasso (4). Si l'on représente par $\gamma_2\,(n)$ la condition pour qu'une conique touche deux fois une surface générale d'ordre n, on a

$$\gamma_2(n) = \frac{1}{2} n(n-1)\{8(2n-3)\mu^2 - 2(4n-7)\mu\nu$$
$$+ 2(n^2 - n - 1)\nu^2 + (4n-9)\nu\rho + 2\rho^2\}.$$

Avant de terminer ce paragraphe, signalons une belle étude de M. Schuh (34) sur les méthodes employées en géométrie énumérative, et contenant de nombreux détails sur les recherches dont il a été question plus haut.

§ 2. — *Les recherches de géométrie analytico-projective.*

3. Par analogie avec la géométrie réglée, appelons *congruence*, un système de coniques de l'espace dépendant de deux paramètres. L'*ordre* d'une congruence de coniques sera égal au nombre de coniques de la congruence passant par un point arbitraire, la *classe* sera le nombre de coniques s'appuyant en deux points sur une droite quelconque.

En 1892, M. Montesano (24) a considéré la congruence de coniques engendrée par les intersections des éléments correspondants d'une gerbe de plans et d'un réseau de quadriques homographiques. Cette congruence, dont l'ordre et la classe sont égaux à l'unité, peut être considérée comme le lieu des intersections variables des surfaces cubiques d'un *réseau* dont les éléments ont en commun une courbe gauche du septième ordre et de genre cinq sur laquelle chaque conique s'appuie en six points.

Le problème qui s'est posé alors est celui de la détermination des différents types de congruences de coniques d'ordre un; M. Montesano (25) l'a abordé l'année suivante. Il commence par démontrer que les plans des coniques d'une congruence linéaire enveloppent une surface rationnelle, puis qu'une congruence linéaire de coniques peut toujours être considérée comme le lieu des intersections variables des surfaces d'un réseau et qu'il existe une infinité de ces réseaux. M. Montesano établit ensuite des relations entre les caractères de la congruence et des courbes sur lesquelles les coniques de la congruence s'appuient.

Vers la même époque, M. Pieri (29) s'était proposé de déterminer toutes les congruences linéaires de coniques qui s'appuient en deux points sur une conique et celles qui sont de classe deux. Pour résoudre le premier problème, M. Pieri rapporte projectivement les quadriques passant par une conique fixe de l'espace aux hyperplans d'un espace linéaire à quatre dimensions; le problème est alors ramené à la détermination des congruences linéaires de plans dans cet espace, problème connu. M. Pieri ramène aussi le second problème à une propriété de l'espace à quatre dimensions, mais la résolution est incomplète, comme M. Montesano (26) l'a montré dans un mémoire publié en 1895.

Dans ce nouveau travail, M. Montesano remarque qu'une congruence linéaire de coniques est complètement déterminée lorsque l'on connaît soit un réseau de surfaces dont les faisceaux ont pour bases variables les coniques de la congruence, soit un faisceau de surfaces sur chacune desquelles se trouve un faisceau de coniques de la congruence. Les congruences sont classées d'après le type de l'involution qu'elles déterminent sur un plan quelconque de l'espace. Ces involutions ont été ramenées par des transformations birationnelles à trois types fondamentaux par M. Bertini et, plus tard, par M. Kantor (*), et M. Montesano détermine des congruences de coniques d'ordre un qui marquent sur un plan quelconque un de ces types. A la fin de son mémoire, M. Montesano démontre que :

Une congruence linéaire de coniques admet un faisceau générateur de surfaces rationnelles à sections planes rationnelles ou elliptiques, ou admet un réseau générateur de surfaces rationnelles à sections planes elliptiques.

M. Montesano en déduit qu'une congruence de coniques admet un réseau ou un faisceau générateur de surfaces d'ordre ≤ 8. Ensuite il déclare qu'il a examiné séparément toutes les transformations birationnelles involutives du plan possédant des courbes unies de genre un, et qu'il a cherché quand il pouvait y avoir une congruence linéaire de coniques, donnant une telle correspondance, mais M. Montesano ne donne aucune démonstration de ce dernier point.

S. Kantor (21) a démontré que toute congruence linéaire de coniques peut se ramener, par des transformations birationnelles, à une congruence ayant toutes ses courbes dans les plans d'un faisceau, ou toutes ses courbes dans les quadriques d'un réseau.

(*) Consulter : G. Castelnuovo, *Sulla razionalita delle involuzione piane.* (Math. Annalen, 1893, XLIV, pp. 125-155.)

M. Veneroni (42) a démontré que la seule congruence de coniques d'ordre et de classe un est la congruence étudiée par M. Montesano (24).

On sait que M. Stuyvaert (41) a ramené la détermination des congruences linéaires de cubiques gauches à celles des réseaux de degré (effectif) un de courbes planes rationnelles. Je suis arrivé au même résultat pour les congruences linéaires de coniques. D'abord, j'ai observé (12) que les équations

$$\left\| \begin{matrix} a_x^2 & a_x^2 & \mathrm{A} \\ b_x^2 & b'_x & \mathrm{B} \end{matrix} \right\| = 0,$$

ou encore les équations

$$\left\| \begin{matrix} a_x^2 & a'_x & a''_x \\ b_x & \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{matrix} \right\| = 0,$$

a_x, b_x, ... étant des formes linéaires quaternaires et A, B des constantes, représentent respectivement une conique. J'ai étudié (15) les congruences linéaires des coniques les plus simples dont l'élément générateur peut être représenté ainsi ; tous les types rencontrés l'avaient déjà été par M. Montesano (26).

Dans une petite note récente (16), j'ai démontré que toute congruence linéaire de coniques possède des points singuliers.

Quelques congruences de coniques dont l'ordre est supérieur à un ont été considérées. M. J. de Vries (9) a étudié la congruence lieu des coniques situées sur les surfaces cubiques d'un faisceau ; cette congruence est d'ordre 27 et de classe 42. M. de Vries (10) a encore étudié la congruence d'ordre et de classe deux formée par les coniques intersections des éléments correspondants d'une quadrique enveloppe de plans et d'un réseau de quadriques homographiques.

Enfin, j'ai étudié une congruence particulière d'ordre deux et de classe un (13).

4. Appelons *complexe* de coniques, un ensemble triplement infini et algébrique de coniques de l'espace. L'ordre d'un complexe sera le nombre de coniques situées dans un plan arbitraire, la classe sera celle du cône enveloppé par les plans des coniques du complexe passant par un point.

On sait que le lieu des points de contact avec un plan des cubiques gauches passant par cinq points de l'espace est une conique. Lorsque l'on considère la gerbe formée par les cubiques gauches passant par cinq points fixes, on définit ainsi dans chaque plan une conique dont le lieu est un complexe d'ordre et de classe un qui a été étudié par M. G. Humbert (20).

Dans son grand ouvrage sur la géométrie réglée, M. R. Sturm (38) a considéré le complexe engendré par les coniques enveloppes des droites d'un complexe quadratique; ce complexe est d'ordre un et de classe deux.

M. Montesano (27) s'est occupé d'un complexe d'ordre un et de classe deux engendré de la manière suivante ; soient k_1, k_2, k_3, k_4 quatre complexes linéaires de droites; on considère tous les faisceaux de rayons tels que les droites de chacun de ces faisceaux appartenant aux quatre complexes k_1, k_2, k_3, k_4 ont un rapport anharmonique donné. Un plan de l'espace contient une infinité de pareils faisceaux et leurs sommets sont sur une conique qui engendre le complexe.

C'est dans ce travail que M. Montesano a défini l'ordre et la classe d'un complexe de coniques comme nous l'avons fait plus haut.

Un problème s'est alors posé : Quel est le type le plus général de complexe bilinéaire de coniques? Ce problème a été résolu par M. Montesano (28) (*) par ce théorème :

Le complexe bilinéaire de coniques le plus général peut être engendré par les intersections des plans de l'espace avec les quadriques correspondantes d'un système linéaire triplement infini rapporté projectivement à l'espace (lieu de plans).

Indépendamment de M. Montesano et avant la publication de son mémoire, j'avais démontré un théorème un peu moins

---

(*) Je cite ce mémoire d'après la REVUE SEMESTRIELLE DES PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES. Amsterdam, 1910, 1re livraison.

précis (11) et j'avais étudié avec quelques détails le complexe auquel M. Montesano est arrivé (14).

Dans un mémoire couronné par l'Académie royale de Belgique, M. Bordiga (3) s'est occupé d'un complexe d'ordre un et de classe quatre lié à une congruence de droites d'ordre quatre et de classe deux.

Récemment, je me suis occupé d'un complexe de coniques d'ordre un et de classe quatre (17) que j'obtiens en considérant tous les triangles ABC dont les côtés appartiennent respectivement à trois complexes linéaires de droites et dont deux sommets B, C se trouvent respectivement sur des droites de deux congruences réglées bilinéaires. Tout plan de l'espace contient ∞^1 de ces triangles et le troisième sommet A décrit la conique engendrant le complexe.

Signalons enfin une étude faite par M. Bordiga (2) d'un complexe de cercles d'ordre quatre.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE (*)

1. Berzolari (E.), Sulle coniche appogiate in più punti a date curve algebriche. (*Rend. del R. Istituto Lombardo*, 1900, (2), t. XXXIII, pp. 665-674, 809-821.)

2. Bordiga (G.), Di un complesso di cerchi del quarto ordine. (*Atti del R. Istituto Veneto*, 1903-1904, t. LXIII, pp. 733-748.)

3. Idem, Étude sur la correspondance quadratique. (*Mémoires in-4° de l'Acad. royale de Belgique* (Classe des sciences), 1907, t. II, pp. 1-88, ch. I.)

4. Bottasso (M.). Sopra le coniche bitangenti alle superficie algebriche. (*Annali di Matematica*, 1903, (3), t. VIII, pp. 233-243.)

(*) Dans les renvois aux publications périodiques, nous indiquons l'année, la série, en chiffres arabes placés entre parenthèses, le volume en chiffres romains et la pagination.

5. Chasles (M.) Systèmes de coniques qui satisfont à sept conditions dans l'espace. (*Comptes rendus*, 1865, t. LXI, pp. 389-396.)

6. Crepas (A.), Sulle coniche che secano e toccano delle curve in un iperspazio. (*Rend. del R. Istituto Lombardo*, 1903, (2), t. XXXVI, pp. 255-277, 284-403.)

7. Dalhuisen (A.), Over eenige aantallen van kegelsneden die an acht voorwaarden voldoen (*Proefschrift*, Utrecht, 1905.)

8. De Vries (J.), The number of conics intersecting eight given right lines. (*Verslagen van de konink. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam*, 1901, pp. 181-184.)

9. Idem, The congruence of the conics situated on the cubic surfaces of a pencil. (*Id.*, 1904, pp. 264-266.)

10. Idem, A congruence of order two and class two formed by conics. (*Id.*, 1904, pp. 311-314.)

11. Godeaux (L.), Détermination des variétés de complexes bilinéaires de coniques. (*Bull. de l'Acad. royale de Belgique* (Classe des sciences), 1908, pp 597-601, 812-813; 1909, pp. 499-500.)

12. Idem, Sur la représentation analytique de la conique dans l'espace. (*Id.*, 1908, pp. 896-902.)

13. Idem, Sur une congruence (2, 1) de coniques. (*Mémoires de la Société des sciences du Hainaut*, 1908, (6), t. X, pp. 1-10.)

14. Idem, Sur un complexe bilinéaire de coniques. (*Nouv. Annales de Math.*, 1909, (4), t. IX, pp. 312-317.)

15. Idem, Sur quelques congruences linéaires de coniques. (*Archiv der Math. und Phys.*, 1910, (3), t. XVI, pp. 101-105.)

16. Idem, Sur l'existence des points singuliers dans les congruences linéaires de coniques. (*Bull. de l'Acad. royale de Belgique* (Classe des sciences), 1910, pp. 184-186.)

17. Idem, Sur un complexe de coniques de caractéristiques un et quatre. (*Id.*, 1910, pp. 725-737.)

18. Halphen (M.), Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre. (*Bull. de la Soc. Math. de France*, 1873-1874, t. II, pp. 11-33.)

19. Hierholzer, Ueber kegelschnitte im Raume. (*Math. Annalen*, 1870, t. II, pp. 563-586.)

20. Humbert (G.), Sur un complexe remarquable de coniques et sur la surface du troisième ordre. (*Journal de l'École polytechnique,* 1894, t. LXIV, pp. 123-150.)

21. Kantor (S.), Die Typen der linearen Complexe rationaler Curven im R_r. (*American Journal of Math.*, 1901, t. XXIII, pp. 1-28.)

22. Lüroth (J.), Ueber die Anzahl der kegelschnitte, welche acht Geraden im Raumen schneiden. (*Journal de Crelle,* 1868, t. LXVIII, pp. 185-190.)

23. Idem Eine Aufgabe über kegelschnitte im Raume. (*Math. Annalen,* 1870, t. III, pp. 124-133.)

24. Montesano (D.), Su di un sistema lineare di coniche dello spazio. (*Atti della R. Accad. di Torino,* 1892, t. XXVII, pp. 660-690.)

25. Idem, Su le congruenze lineari di coniche nello spazio. (*Rend. del R. Istituto Lombardo*, 1893, (2), t. XXVI, pp. 589-603.)

26. Idem, Su i varii tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio. (*Rend. della R. Accad. di Napoli*, 1895, pp. 93-110, 155-181.)

27. Idem, Una estensione del problema della proiettività a gruppi di complessi e di congruenze lineari di rette. (*Annali di Matematica*, 1898, (3), t. I, pp. 313-358.)

28. Idem, Su i complessi bilineari di coniche nello spazio. (*Atti del IV° Congresso dei Matematici*. Roma, 1908, II, pp. 231-233.)

29. Pieri (M.), Sopra alcune congruenze di coniche. (*Atti della R. Accad. di Torino*. 1893, XXVII, pp. 289-303.)

30. Schubert (H.), Beiträge zur abzählenden Geometrie. (*Math. Annalen*, 1876, X, pp. 1-116; 1878, XIII, pp. 429-539.)

31. Idem, Moduln vielfacher Bedingungen bei Flächen zweiter Ordnung. (*Ibid.*, X, pp. 318-364.)

32. Idem., Mitteilungen aus der abzählenden Geometrie p — dimensionaler Raume eersten und zweiten Grades. (*Jahresbericht der D. Math. Verein.*, 1890-1891, I, pp. 48-49.)

33. Idem, Allgemeine Anzahlfunctionen für Kegelschnitte, Flächen und Räume zweiten Grades an n dimensionen. (*Math. Annalen,* 1894, XLV, pp. 153-206.)

34. Schuh (F.), Vergelijkend overzicht der methoden ter bepaling van aantallen vlakke krommen. (*Academisch Proefschrift*, Amsterdam, 1905.)

35. Severi (F.), Ricerche sulle coniche toccanti delle curve gobbe. (*Atti della R. Accad. di Torino*, 1900, XXXV, pp. 774-541.)

36. Idem, Sopra le coniche che toccano e seccano una o più curve gobbe. (*Ibid.*, 1900, XXXVI, pp. 74-93.)

37. Sturm (R.), Sur la surface enveloppée par les plans qui coupent une courbe gauche du quatrième ordre et de la seconde espèce en quatre points d'un cercle. (*Annali di Matematica*, 1870, (2), IV, pp. 1-13.)

38. Idem, Die Gebilde eersten und zweiten grades der Liniengeometrie. Leipzig, Teubner, III, pp. 26-49.

39. Stuyvaert (M.), Sur les plans qui coupent en des points d'une conique un système de lignes de l'espace. (*Mém. in-8° de l'Académie royale de Belgique*, 1901, LXII.)

40. Idem, Étude de quelques surfaces algébriques engendrées par des courbes du second et du troisième ordre. Thèse de doctorat spécial. Gand, Hoste, 1902, pp. 1-11.

41. Idem, Cinq études de géométrie analytique. Prix F. Deruyts, 1906. (*Mémoires de la Société des sciences de Liége*, 1907, (3), VII, pp. 78-80. Gand, Van Goethem.)

42. Veneroni (E.), Sopra alcuni sistemi di cubiche gobbe. (*Rend. del Circolo Matematico di Palermo*, 1902, XVI, pp. 209-229.)

CHAPITRE II.

La géométrie de la conique dans l'espace.

§ 1. — *La représentation analytique de la conique.*

5. Considérons six quadriques, linéairement indépendantes, sans point commun, et dont les équations sont respectivement

$$a1_x^2 = 0, \quad a2_x^2 = 0, \ldots, a6_x^2 = 0,$$

$ai (i = 1, 2, \ldots, 6)$ étant des symboles et a_x représentant une forme linéaire homogène à quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4.

Toute conique de l'espace peut être représentée par des équations de la forme

$$\lambda_1 a1_x^2 + \lambda_2 a2_x^2 + \ldots + \lambda_6 a6_x^2 = 0, \tag{1}$$

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0. \tag{2}$$

En effet, la seconde de ces équations représente le plan de la conique. D'autre part, par cinq points de l'espace passe une et une seule quadrique (1) ; en particulier, si ces cinq points sont choisis sur la conique, la quadrique déterminée contient la conique toute entière.

Ainsi, à une conique de l'espace correspond généralement un seul système de valeurs des rapports $\frac{u_1}{u_4}, \frac{u_2}{u_4}, \frac{u_3}{u_4}, \frac{\lambda_1}{\lambda_6}, \frac{\lambda_2}{\lambda_6}, \ldots, \frac{\lambda_5}{\lambda_6}$, et inversement. Ces huit rapports sont en quelque sorte les coordonnées de la conique; nous allons voir qu'on exprime simplement par des relations entre ces rapports quelques conditions simples auxquelles on peut assujettir les coniques.

6. Exprimons en premier lieu qu'une conique, donnée par les équations (1) et (2), s'appuie en un point sur la droite qui joint deux points (y_1, y_2, y_3, y_4), (z_1, z_2, z_3, z_4). Les coordonnées du point d'appui sont de la forme

$$y_i + kz_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

donc on doit avoir

$$\sum_{i=1}^{6} \lambda_i ai_y^2 + k \sum_{i=1}^{6} \lambda_i ai_y ai_z + k^2 \sum_{i=1}^{6} \lambda_i ai_z^2 = 0,$$
$$u_y + ku_z = 0.$$

En éliminant k, on trouve l'équation

$$\begin{vmatrix} \Sigma\lambda_i ai_y^2 & \Sigma\lambda_i ai_y ai_z & \Sigma\lambda_i ai_z^2 \\ u_y & u_z & 0 \\ 0 & u_y & u_z \end{vmatrix} = 0.$$

On obtient donc une relation linéaire en λ et quadratique en u.

7. Recherchons maintenant l'expression de la condition pour une conique de toucher un plan

$$v_x = 0.$$

Il suffira d'exprimer que la droite située à l'intersection des plans

$$u_x = 0, \qquad v_x = 0$$

touche la quadrique (1). Pour que le plan

$$u_x + kv_x = 0$$

touche la quadrique (1), on doit avoir

$$\begin{vmatrix} u_1 + kv_1 & u_2 + kv_2 & u_3 + kv_3 & u_4 + kv_4 & 0 \\ \sum_{i=1}^{6} \lambda_i a i_{11} & \sum \lambda_i a i_{21} & \cdots & \sum \lambda_i a i_{41} & u_1 + kv_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & u_2 + kv_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & u_3 + kv_3 \\ \sum \lambda_i a i_{14} & \cdots & \cdots & \sum \lambda_i a i_{44} & u_4 + kv_4 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$k^2 \begin{vmatrix} v_j & 0 \\ \sum \lambda_i a i_{jk} & v_k \end{vmatrix}^{(*)} + 2k \begin{vmatrix} u_j & 0 \\ \sum \lambda_i a i_{jk} & v_k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_j & 0 \\ \sum \lambda_i a i_{jk} & u_k \end{vmatrix} = 0.$$

Les deux racines k de cette équation doivent être égales, donc la condition cherchée est

$$\begin{vmatrix} u_j & 0 \\ \sum \lambda_i a i_{jk} & v_k \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} u_j & 0 \\ \sum \lambda_i a i_{jk} & v_k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_j & 0 \\ \sum \lambda_i a i_{jk} & u_k \end{vmatrix} = 0.$$

8. Cherchons en dernier lieu quelle est la relation existant entre les λ et les u quand la conique dégénère en deux droites.

(*) Cette notation représente le discriminant de l'équation (1) bordé.

Cela arrive évidemment quand la quadrique (1) touche le plan (2); alors, on a

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \\ \sum_{i=1}^{6} \lambda_i a i_{11} & \sum \lambda_i a i_{21} & \ldots & \sum \lambda_i a i_{41} & u_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & u_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & u_3 \\ \sum \lambda_i a i_{14} & \ldots & \ldots & \sum \lambda_i a i_{44} & u_4 \end{vmatrix} = 0. \qquad (3)$$

Soient maintenant d, d' deux droites qui se coupent. Par trois points de d et deux points de d' passe une seule quadrique du système (1) et cette quadrique contient entièrement les deux droites, donc elle touche le plan déterminé par ces droites. Par conséquent, toute conique dégénérée de l'espace peut être représentée par les équations (1) et (2) moyennant (3).

§ 2. — *Interprétation hyperspatiale.*

9. Si l'on adopte la terminologie introduite par M. Klein dans son célèbre *Programme d'Erlangen* (*), on dira que le *groupe fondamental* de la géométrie de la conique dans l'espace est constitué par l'ensemble de toutes les transformations qui mutent une conique en une conique, et que cette géométrie consiste en la recherche des propriétés de l'espace invariantes par rapport à ce groupe. On peut donner une interprétation plus claire à ces mots en utilisant la notion d'hyperespace.

Rappelons en premier lieu ce que l'on entend par *surface de*

(*) Ces théories ont été développées par M. Klein dans l'ouvrage : *Einleïtung in die höhere Geometrie*, II, Vorlesung gehalten im Sommersemester 1893. Ausgearbeitet von Fr. Schilling. Göttingen.

Véronèse (*). Soient, dans un plan de coordonnées homogènes (x_1, x_2, x_3), six coniques linéairement indépendantes

$$b1_x^2 = 0, \quad b2_x^2 = 0, \ldots, b6_x^2 = 0.$$

Toute conique du plan a une équation de la forme

$$\sum_{i=1}^{6} \lambda_i bi_x^2 = 0. \qquad (1)$$

Soient $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ les coordonnées homogènes d'un espace linéaire à cinq dimensions S_5. La surface définie par les équations

$$\rho X_i = bi_x^2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6) \qquad (2)$$

est du quatrième ordre et a reçu le nom de *surface de Véronèse*, du nom du géomètre qui l'a le premier étudiée.

Moyennant (2), l'équation (1) s'écrit

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_6 X_6 = 0,$$

donc la surface de Véronèse s'obtient en rapportant projectivement les coniques d'un plan et les hyperplans d'un espace à cinq dimensions.

On conclut de là que le plan et la surface de Véronèse sont en correspondance birationnelle. Aux points d'une conique du plan correspondent les points d'une courbe du quatrième ordre, section hyperplane de la surface. Aux points d'une droite du plan correspondent les points d'une conique de la surface et ainsi la surface de Véronèse contient ∞^2 coniques ayant deux à deux un point commun. Cette propriété est caractéristique.

(*) On trouvera une théorie détaillée de la surface de Véronèse dans : BERTINI, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi*, *con appendice sulle curve algebriche e loro singolarità*. Chap. XIV et XV. Pisa, 1907.

10. Considérons de nouveau le système de quadriques (chap. II, § 1)

$$\sum_{i=1}^{6} \lambda_i ai_x^2 = 0, \tag{1}$$

et rapportons projectivement les quadriques de ce système aux hyperplans

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots, \lambda_6 X_6 = 0$$

de l'espace linéaire à cinq dimensions S_5. On aura, ρ étant un facteur de proportionnalité,

$$\rho X_i = ai_x^2. \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6) \tag{2}$$

A tout point (x) de l'espace correspondra un point (X) de S_5, par suite les équations (2) représenteront une variété V à trois dimensions. A un point de V correspondra un seul point (x) de l'espace. L'ordre de cette variété sera égal à huit, car trois quadriques (1) ont huit points variables en commun. A une quadrique (1) de l'espace correspondra ainsi une surface du huitième ordre section hyperplane de V.

En résumé, nous avons une variété à trois dimensions V, du huitième ordre, en correspondance birationnelle avec l'espace linéaire à trois dimensions, de telle façon qu'à ses sections hyperplanes correspondent les quadriques du système (1).

Considérons maintenant le plan π d'équation

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

A une conique de ce plan correspond une quadrique du système (1) la contenant, et, par conséquent, un hyperplan de S_5. Ainsi les coniques du plan π et les hyperplans de S_5 sont rapportés projectivement, donc les points de la variété V correspondant aux points du plan π forment une surface de

Véronèse. On voit ainsi que *la variété* V *contient un système linéaire triplement infini de surfaces de Véronèse.*

A une conique de l'espace correspond sur la variété V une courbe du quatrième ordre entièrement située dans un hyperplan, puisque la conique est située sur une quadrique de (1). A une droite de l'espace correspond une conique de V. Deux surfaces de Véronèse de V ont en commun une conique.

En résumé, *la variété* V *contient un système linéaire* ∞^8 *de courbes rationnelles du quatrième ordre ; il y a* ∞^4 *de ces courbes qui dégénèrent en deux coniques, et ces* ∞^4 *coniques sont les intersections du système linéaire* ∞^3 *de surfaces de Véronèse situé sur* V.

Une transformation de l'espace à trois dimensions qui change une conique en une conique devient une transformation de la variété V en elle-même, qui échange les courbes du quatrième ordre du système ∞^8. Le groupe formé par toutes ces transformations de V en elle-même devient le groupe fondamental de notre géométrie.

Nous voyons en particulier que le groupe formé par les transformations projectives de S_5 qui laissent invariable la variété V, c'est-à-dire qui portent un point de V en un point de V, est un sous-groupe du groupe fondamental.

CHAPITRE III

Les congruences de coniques.

§ 1. — *Généralités.*

11. Reprenons, pour définir une conique, les équations (ch. II, § 1)

$$\lambda_1 a1_x^2 + \lambda_2 a2_x^2 + \ldots + \lambda_6 a6_x^2 = 0, \qquad (1)$$

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0. \qquad (2)$$

et, pour abréger, désignons les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6, u_1, u_2, u_3, u_4$ sous le nom de *coordonnées de la conique.*

On appelle *congruence de coniques*, l'ensemble des coniques de l'espace dont les coordonnées s'expriment en fonctions algébriques effectives de deux paramètres t_1, t_2. D'une façon générale, on aura huit équations algébriques indépendantes

$$F_i(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6;\ u_1, u_2, \ldots, u_4;\ t_1, t_2) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, 8) \qquad (3)$$

homogènes par rapport aux (λ) et par rapport aux (u).

Entre les équations (3), éliminons les (λ); nous obtiendrons trois équations algébriques, homogènes en (u) :

$$\varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_4;\ t_1, t_2) = 0. \quad (i = 1, 2, 3). \qquad (4)$$

Il se peut que les paramètres t_1, t_2 entrent effectivement dans ces équations, ou n'y entrent que par une de leurs combinaisons

$$\theta = \theta(t_1, t_2),$$

ou encore n'y entrent pas du tout, mais nous laisserons ce cas banal de côté. Dans le premier cas, les plans des coniques de la congruence enveloppent une surface, dans le second une développable.

Les équations (2), (3) et

$$u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3 + u_4y_4 = 0$$

où les (x) et les (y) sont fixes, ont en commun un nombre généralement fini de solutions; ce nombre est appelé *classe de la congruence*. On voit qu'il correspond au nombre de coniques de la congruence dont les plans passent par une droite fixe.

Selon que les plans des coniques d'une congruence enveloppent une surface (*) ou une développable, la classe de la congruence est supérieure ou égale à zéro.

Éliminons les (u) entre les équations (3), nous obtenons cinq équations indépendantes, algébriques, homogènes par rapport aux (λ),

$$\psi_i(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6;\ t_1, t_2) = 0. \quad (i = 1, 2, \ldots, 5) \tag{5}$$

Dans ces équations, les paramètres t_1, t_2 peuvent entrer effectivement, ou par une de leurs combinaisons

$$\theta' = \theta'(t_1, t_2),$$

ou enfin peuvent ne pas y figurer du tout, mais ce dernier cas sera encore laissé de côté.

En correspondance, on aura une variété doublement infinie, ou simplement infinie de quadriques. Il est à remarquer que cette variété dépend du choix du système linéaire (1).

Terminons ce paragraphe en observant que puisque nous avons supposé que les fonctions qui figurent dans les équa-

---

(*) Pour abréger, cette surface sera dite *surface-enveloppe* de la congruence.

tions (3) étaient des fonctions effectives des deux paramètres t_1, t_2, ceux-ci ne peuvent pas entrer à la fois dans les équations (4) et (5) par une même combinaison, ce qui est géométriquement évident.

12. Étant données des valeurs quelconques des (x), les équations (1), (2) et (3) ont un nombre fini de solutions; donc par un point de l'espace il passe généralement un nombre fini de coniques d'une congruence. Ce nombre est appelé *ordre de la congruence*.

Il existe des points exceptionnels, ce sont les *points focaux*. Par chacun de ces points passent (au moins) deux coniques coïncidentes de la congruence. M. Darboux (*) a montré que dans une congruence de coniques, chaque conique possède six points focaux. Les points focaux d'une congruence de coniques décrivent les six nappes d'une surface appelée *surface focale*.

Exceptionnellement, il peut exister des points de l'espace par lesquels passent une infinité simple de coniques d'une congruence : ce sont les *points singuliers*. Un point singulier prend la place d'un point focal et le lieu des points singuliers d'une congruence ne peut être qu'une courbe, dite *courbe singulière*.

D'une façon générale, si les coniques d'une congruence possèdent $h(\leq 6)$ points singuliers sur une courbe C, celle-ci est dite *courbe* h — *singulière* et h nappes de la surface focale dégénèrent en la courbe C.

Enfin, il peut exister un point, dit *point principal,* qui est commun à toutes les coniques d'une congruence. Deux nappes de la surface focale dégénèrent évidemment en un pareil point.

Une congruence de coniques d'ordre un ne possède pas de points focaux, mais seulement des points singuliers et des points principaux (éventuellement).

(*) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. Paris, 1889, t. II, chap. I.

§ 2. — *Sur les congruences linéaires de coniques.*

13. Soit Γ une congruence linéaire (c'est-à-dire d'ordre un) de coniques. Les intersections des coniques de Γ avec un plan quelconque π forment une involution. D'après un théorème de M. Castelnuovo (*), cette involution est rationnelle. Or, cette involution est birationnellement équivalente à la congruence Γ, donc :

Une congruence linéaire de coniques est rationnelle.

De ce théorème de M. Castelnuovo, nous pouvons encore conclure que dans les équations d'une conique de la congruence Γ :

$$\lambda_1 a1_x^2 + \lambda_2 a2_x^2 + \ldots + \lambda_6 a6_x^2 = 0,$$

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0,$$

les (λ) et les (u) sont des fonctions effectives, homogènes et rationnelles de trois paramètres t_1, t_2, t_3, ou des fonctions non homogènes d'un paramètre.

Soient (ch. III, § 1),

$$\mathbf{F}_i(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_5; u_1, u_2, u_3, u_4, t_1, t_2) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 8) \quad (1)$$

les équations définissant la congruence Γ. D'après le théorème établi plus haut, les fonctions $\mathbf{F}_i$ sont rationnelles en t_1, t_2, algébriques et homogènes en (λ) et en (u). Résolvons ces équations par rapport aux (λ) et aux (u) et substituons à t_1, t_2 les rapports $\frac{t_1}{t_3}$, $\frac{t_2}{t_3}$, nous obtenons

$$\lambda_1 : \lambda_2 : \ldots : \lambda_6 = \varphi_1(t_1, t_2, t_3) : \varphi_2 : \ldots : \varphi_6,$$

$$u_1 : u_2 : u_3 : u = \psi_1(t_1, t_2, t_3) : \psi_2 : \psi_3 : \psi_4,$$

les φ et les ψ étant rationnelles, entières et homogènes.

(*) *Sulla razionalità...* (Loc. cit.)

Une conique de la congruence Γ a donc pour équations

$$\sum_{k=1}^{6} \varphi_k(t_1, t_2, t_3) \,.\, a k_x^2 = 0, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{4} \psi_i(t_1, t_2, t_3) x_i = 0. \tag{3}$$

Comme nous l'avons déjà fait remarquer (*), il peut arriver que dans la résolution des équations (1) on obtienne soit des fonctions φ, soit des fonctions ψ dans lesquelles un des paramètres t manque, le même paramètre ne pouvant du reste pas être absent simultanément dans les φ et dans les ψ. Cette remarque nous conduit à répartir les congruences linéaires de coniques en deux catégories, suivant que la surface enveloppe des plans des coniques est une développable ou une surface proprement dite, c'est-à-dire suivant que l'équation du plan d'une conique de la congruence a la forme

$$\sum_{i=1}^{4} \psi_i(t_1, t_2) x_i = 0,$$

ou la forme (3), dans laquelle t_1, t_2 et t_3 entrent effectivement.

On serait tenté d'introduire une nouvelle subdivision basée sur la dimension effective du système formé par les quadriques d'équation (2), mais cette subdivision serait artificielle, comme on s'en rend facilement compte sur un exemple. Supposons, en effet, que le système de quadriques (2) soit un faisceau. Nous pouvons toujours choisir, et d'une infinité de manières, un système linéaire ∞^5 de quadriques ne contenant pas ce faisceau. Les quadriques de ce nouveau système contenant les coniques de la congruence envisagée, seront généralement en nombre ∞^2, ce qui prouve notre assertion.

(*) Sous une forme un peu différente.

14. *Congruences de la première catégorie.* Soit Γ une congruence linéaire de coniques dont la courbe générique a pour équations

$$\sum_{k=1}^{6} \varphi_k(t_1, t_2, t_3) a k_x^2 = 0, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1} \psi_i(t_1, t_2) x_i = 0. \tag{4}$$

Désignons par Φ le système formé par les quadriques d'équation (2), système que nous supposons doublement infini, et par Ψ la développable enveloppée par les plans d'équation (4).

Sur un plan π de Ψ se trouvent ∞^1 coniques de Γ ; par un point quelconque de π ne peut passer qu'une de ces coniques, par suite elles forment un faisceau, car autrement la congruence ne serait pas linéaire. Désignons par φ le système formé par les ∞^1 quadriques de Φ qui marquent sur π les coniques de Γ. Le plan π ne peut faire partie de l'enveloppe de φ, car autrement toutes les coniques de la congruence dégénéreraient; par suite φ est un faisceau.

Supposons que la classe de la développable Ψ soit supérieure à un. Par un point P de l'espace passent plus d'un plan de Ψ, et dans chacun de ces plans se trouve une conique de Γ passant par P ; la congruence Γ ne sera donc linéaire que si la développable Ψ est un faisceau de plans.

D'après ce que nous avons vu, à un plan du faisceau Ψ correspond un faisceau de quadriques φ, mais inversement un de ces faisceaux peut correspondre à un certain nombre ν de plans de Ψ.

Les fonctions $\varphi_i(t_1, t_2, t_3)$ sont rationnelles, de sorte que la variété de quadriques Φ est rationnelle, cette variété est donc une série rationnelle simplement infinie de faisceaux φ. Les groupes de ν plans de Ψ correspondants à un même faisceau φ forment une involution I_1^ν et cette involution est rapportée homographiquement à la série des faisceaux φ.

La droite a, axe du faisceau de plans Ψ, est évidemment une droite bisingulière de la congruence Γ. Dans chaque plan de Ψ se trouvent encore quatre points singuliers pour la congruence, ce sont les points-base du faisceau de coniques de Γ situées dans ce plan. Trois cas peuvent se présenter :

a) Aucun de ces quatre points ne se trouve généralement sur la droite a;

b) Un de ces points se trouve toujours sur a;

c) Deux de ces points se trouvent toujours sur a.

On obtient ainsi trois types de congruences que nous dénoterons par Γ_a, Γ_b, Γ_c.

15. Le lieu des quatre points singuliers d'une congruence Γ_a situés dans un plan de Ψ en dehors de la droite a est évidemment une courbe C, d'un certain ordre n, s'appuyant $n - 4$ fois sur la droite a. Soit k le nombre de points d'appui distincts de C sur a. Un de ces points d'appui est à la fois un point-base pour les faisceaux de coniques de Γ_a situés dans ν plans de Ψ, donc il est multiple d'indice ν pour C. Par suite, on a

$$n = k\nu + 4.$$

La congruence Γ_a la plus générale est le lieu des coniques s'appuyant en deux points sur une droite et en quatre points sur une courbe d'ordre $k\nu + 4$ *ayant* k *points multiples d'indice* ν *sur la droite singulière* (*).

D'après une remarque déjà faite, la congruence Γ_a est de classe zéro.

Remarquons enfin que si $k = 0$, $\nu = 1$, la courbe C est une

(*) Cette congruence est signalée par M. Montesano dans le cas $\nu = 1$. (*Sui varii tipi* .. LOC. CIT.)

quartique gauche qui peut être de première espèce, et ainsi commune à ∞^1 quadriques. On aurait trouvé directement cette congruence en supposant le système (2) ∞^1.

16. Dans une congruence Γ_b, le lieu des trois points singuliers situés en dehors de la droite a dans tout plan passant par cette droite, est une courbe C d'un certain ordre n s'appuyant $n-3$ fois sur a. Soit k le nombre de points communs distincts à C et à a. Deux cas peuvent se présenter :

1° Le point-base sur a des faisceaux de coniques Γ_q situés dans les plans passant par a est variable sur cette droite;

2° Ce point est fixe.

Dans le premier cas, chaque point d'appui de C sur a est multiple d'indice ν pour C et on doit avoir

$$n = k\nu + 3.$$

Dans le second cas, la courbe C passe évidemment par le point fixe si $k \geq 1$. Soit P ce point fixe (principal pour sa congruence), p sa multiplicité pour la courbe C. Les $k-1$ points d'appui restants de C sur a sont multiples d'indice ν pour C, et l'on a

$$n = (k-1)\nu + p + 3.$$

Les congruences Γ_b *les plus générales sont :*

1° *Le lieu des coniques s'appuyant en deux points sur une droite* a *et en trois points sur une courbe d'ordre* $k\nu + 3$ *ayant* k *points multiples d'indice* ν *sur la droite singulière. Les coniques de la congruence situées dans un plan passant par* a *forment un faisceau ayant un point-base sur* a *et les coniques passant par un point de* a *se distribuent en* ν *faisceaux analogues;*

2° *Ou bien le lieu des coniques passant par un point fixe, s'appuyant sur une droite passant par ce point, et s'appuyant en trois points sur une courbe d'ordre* $(k - 1)\nu + p + 3$ *ayant* $k - 1$ *points multiples d'indice* ν *sur la droite singulière et de plus un point multiple d'indice* p *au point principal.*

Les congruences Γ_b sont de classe nulle.

17. Dans une congruence Γ_c, les points singuliers situés dans un plan passant par a sont au nombre de quatre, deux sur a, deux en dehors de cette droite. Il peut se faire que les points singuliers situés sur a soient tous deux mobiles, ou que l'un deux soit fixe, ou enfin qu'ils soient tous deux fixes.

Dans chaque cas, le lieu des deux autres points singuliers est une courbe C, hyperelliptique, d'ordre n, s'appuyant $n - 2$ fois sur a.

Dans le premier cas, on a k points d'appui multiples d'indice ν et

$$n = k\nu + 2.$$

Dans le second cas, la congruence a un point principal multiple d'indice p pour C et $k - 1$ points de a sont multiples d'indice ν pour C; on a

$$n = (k - 1)\nu + p + 2.$$

Enfin, dans le troisième cas, la congruence a deux points principaux, l'un multiple d'indice p, l'autre d'indice $n - p - 2$ pour C.

Les congruences Γ_c *les plus générales sont :*

1° *Le lieu des coniques s'appuyant en deux points sur une droite et en deux points sur une courbe d'ordre* $k\nu + 2$ *ayant* k *points multiples d'indice* ν *sur la droite singulière. Les coniques passant par un point de la droite singulière se distribuent en* ν *faisceaux dans* ν *plans passant par la droite singulière et ces faisceaux ont un second point-base sur cette droite;*

2° *Ou bien le lieu des coniques s'appuyant en deux points dont un fixe sur une droite et en deux points sur une courbe d'ordre* $(k-1)\nu+p+2$ *ayant un point multiple d'ordre* p *au point principal et* $k-1$ *points multiples d'indice* ν *sur la droite singulière. Les coniques passant par un point de cette droite se distribuent en* ν *faisceaux de plans différents.*

3° *Ou enfin le lieu des coniques passant par deux points fixes et s'appuyant deux fois sur une courbe d'ordre* n *ayant aux points fixes des multiplicités d'ordres* p, $n-p-2$ *respectivement.*

18. Congruences de la seconde catégorie. — Soit maintenant Γ une congruence engendrée par les intersections des quadriques

$$\sum_{k=1}^{6} \varphi_k(t_1, t_2, t_3) ak_x^2 = 0$$

d'une variété Φ doublement infinie, et des plans correspondants

$$\sum_{i=1}^{4} \psi_i(t_1, t_2, t_3) x_i = 0$$

d'une surface-enveloppe Ψ.

La variété Φ et la surface Ψ sont rationnelles.

Nous désignerons par n_2 l'indice (*) de Φ, par n_1 la classe de Ψ, et nous supposerons que dans un plan tangent à Ψ se trouvent ν_1 coniques de Γ et que sur une quadrique de Φ il s'en trouve ν_2.

Supposons qu'aux plans tangents à Ψ et passant par un point P correspondent des quadriques de Φ formant un système simplement infini φ d'indice μ_2 et qu'inversement à une quadrique de φ correspondent $k_1(\leq \nu_2)$ plans passant par P. De même aux quadriques passant par P correspondent les plans

(*) Nombre de quadriques passant par deux points.

d'une développable ψ d'indice (classe) μ_1 circonscrite à Ψ, un plan de cette développable correspondant à $k_2(\leq \nu_1)$ quadriques passant par P. On a d'ailleurs

$$\mu_1 k_2 = \mu_2 k_1. \tag{1}$$

Considérons maintenant le lieu des coniques de la congruence dont les plans passent par un point générique P. Ce lieu est une surface **F** passant simplement par P, puisque par ce point passe une seule conique Γ. Les plans des coniques de **F** s'appuyant sur une droite passant par P contiennent évidemment cette droite, donc ils sont au nombre de n_1. Chacun d'eux contient ν_1 coniques de Γ et, par suite, **F** est d'ordre $2n_1\nu_1 + 1$.

Les coniques de la congruence Γ *dont les plans passent par un point fixe engendrent une surface d'ordre* $2n_1\nu_1 + 1$ (*).

Mais nous pouvons calculer l'ordre de cette surface d'une autre manière. Soit (x) une ponctuelle quelconque. Par un point X_1 de (x) passent n_1 plans tangents à Ψ et passant par P, à ces plans correspondent $n_1\nu_1$ quadriques de Φ marquant sur (x), $2n_1\nu_1$ points X_2. Inversement, à un point X_2 correspondent $\mu_2 k_1$ points X_1. D'après le principe de Chasles, il y a $2n_1\nu_1 + \mu_1 k_1$ coïncidences des points X_1, X_2 et un de ces points appartient à **F**; nous trouvons donc pour l'ordre de cette surface un nombre plus élevé que tantôt.

Pour éviter cette contradiction, nous devons admettre qu'il existe une développable Δ de classe δ, circonscrite à Ψ, dont tout plan forme, avec $\frac{1}{\partial}(\mu_2 k_1 - 1)$ plans d'une seconde développable Δ', de classe δ', des quadriques de la variété Φ. Nous n'excluons pas la dégénérescence éventuelle de la développable D et par suite de la développable D'. Les coniques de Γ situées dans les plans passant par P forment une surface d'ordre $2n_1\nu_1 + \mu_2 k_1$, mais chaque plan de D passant par P

(*) Ce théorème a été établi par M. MONTESANO, *Su le congruenze ..* (LOC. CIT.)

entre $\frac{1}{2}(\mu_2 k_1 - 1)$ fois dans cette surface; il reste donc une surface d'ordre effectif $2n_1\nu_1 + 1$, ce qui est conforme au théorème établi plus haut.

19. Considérons une droite a appartenant à la surface Ψ, de sorte que tout plan passant par a contient des coniques de la congruence Γ. Ces coniques seront marquées par les quadriques d'un système A, simplement infini, appartenant à Φ. Il peut arriver que A se scinde en deux systèmes, dont l'un, A', est tel que chacune des quadriques lui appartenant contient a. Alors dans tout plan passant par a se trouvent un certain nombre α de coniques dégénérées. Ces coniques dégénèrent en la droite a et en une autre droite, ou bien en la droite a comptée deux fois. Nous aurons à distinguer ces deux cas dans la suite. Pour le moment, remarquons que la droite a est multiple d'ordre α pour toute surface **F**.

Pour atteindre la plus grande généralité, nous supposerons qu'il existe p droites $a_1, a_2, \ldots, a_p$ analogues à a, et nous indiquerons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ leurs multiplicités respectives pour chaque surface **F**.

20. Une congruence linéaire de coniques ne peut posséder de points focaux. Supposons, de plus, que la congruence Γ ne possède aucun point principal, quitte à examiner ce cas plus tard. Chaque conique de Γ possède six points singuliers qui peuvent se répartir sur k courbes singulières $C_1, C_2, \ldots, C_k$ respectivement d'ordres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, de telle manière que la $i^{ème}$ courbe C_i soit m_i — singulière. On aura évidemment

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = 6. \tag{2}$$

Les courbes $C_1, \ldots, C_k$ appartiendront à chaque surface **F** avec certaines multiplicités que nous représenterons par $q_1, q_2, \ldots, q_k$ respectivement.

Envisageons deux surfaces **F** relatives à deux points quelconques P_1, P_2. Ces deux surfaces auront en commun les courbes singulières, les droites a_1, ..., a_p et enfin $n_1 \nu_1$ coniques de Γ dont les plans passent par P_1 P_2. On aura donc, s'il n'existe aucune droite singulière admettant des coniques infiniment voisines (*),

$$(2n_1\nu_1 + 1)^2 = 2n_1\nu_1 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i q_i^2 + \sigma, \tag{3}$$

moyennant

$$\sigma = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2. \tag{4}$$

Considérons maintenant une surface **F** et une conique de Γ n'appartenant pas à **F**. Les points de rencontre de cette conique avec **F** se trouveront nécessairement sur les lignes singulières de la congruence, donc on a

$$2(2n_1\nu_1 + 1) = m_1 q_1 + m_2 q_2 + \ldots + m_k q_k. \tag{5}$$

Reprenons l'examen de la droite a considérée au numéro précédent. Si les coniques dégénérées de Γ situées dans les plans passant par a sont composées de a et d'autres droites, ces dernières s'appuient sur a et sur les courbes singulières, mais elles doivent engendrer une surface, donc les points d'appui sur les courbes singulières sont au nombre de deux. La droite a devant former une conique de la congruence avec une bisécante de l'ensemble des courbes singulières, s'appuie nécessairement en quatre points sur cet ensemble.

Si les coniques dégénérées situées dans les plans passant par a se composent de la droite a comptée deux fois, cette droite s'appuie naturellement six fois sur les courbes singulières.

(*) Voir MONTESANO, *Suii varii tipi*... (LOC. CIT.)

§ 3. *Congruences linéaires de coniques ayant une courbe sextisingulière.*

21. Proposons-nous maintenant de rechercher les congruences de coniques Γ n'ayant qu'une seule courbe singulière. Les formules (2), (3) et (5) deviennent alors

$$(2n_1\nu_1 + 1)^2 = 2n_1\nu_1 + \lambda q^2 + \sigma,$$
$$(2n_1\nu_1 + 1) = 3q.$$

L'élimination de q donne

$$(2n_1\nu_1 + 1)^2 (9 - \lambda) = 18n_1\nu_1 + 9\sigma.$$

Le second membre étant au moins égal à l'unité, on a pour λ les seules valeurs possibles 6, 7 ou 8. Nous allons examiner ces différents cas en détail.

22. Commençons par le cas $\lambda = 6$. On a

$$4(n_1\nu_1)^2 - 2n_1\nu_1 + 1 - 3\sigma = 0,$$

d'où

$$n_1\nu_1 = \frac{1}{4}\left(1 \pm \sqrt{12\sigma - 3}\right).$$

Le signe — doit évidemment être rejeté. De plus, $\nu_1 = 1$. Posons

$$12\sigma - 3 = z^2,$$

d'où

$$n_1 = \frac{z+1}{4}$$

Nous voyons que $z^2 + 3$ est multiple de 12, donc z est multiple de 3. Posons donc $z = 3z'$, il vient

$$3z'^2 + 1 = 4\sigma, \qquad 3z' + 1 = 4n_1.$$

Par soustraction, on voit que $3z'^2 - 3z'$ est multiple de 4, c'est-à-dire que $z'(z'-1)$ est multiple de 4. On en conclut que z' est multiple de 4 ou multiple de 4 augmenté d'une unité. Dans la première alternative, en supposant $z' = 4\varepsilon$, on aurait

$$4n_1 = 12\varepsilon + 1,$$

ce qui est impossible en nombres entiers. Dans la seconde hypothèse, posons $z' = 4\varepsilon + 1$, ε étant entier positif; alors on a

$$n_1 = 3\varepsilon + 1, \qquad q = 2\varepsilon + 1, \qquad \sigma = 12\varepsilon^2 + 6\varepsilon + 1.$$

Une conique de la congruence ne peut évidemment dégénérer en une droite comptée deux fois, car une telle droite s'appuyerait en six points sur la courbe singulière C, du sixième ordre. Les droites que nous avons appelées $a_1, a_2, \ldots, a_p$ forment donc, avec d'autres droites, des coniques dégénérées de la congruence. Mais ici on a $\nu_1 = 1$, donc $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \ldots, \alpha_p = 1$. D'autre part, une sextique gauche a au plus six quadrisécantes (*) et chacune des droites $a_1, \ldots a_p$ est nécessairement une quadrisécante, donc on a $p \leq 6$ et, par suite,

$$12\varepsilon^2 + 6\varepsilon + 1 \leqslant 6.$$

La seule solution possible en nombre entier est $\varepsilon = 0$, donc

$$n_1 = 1, \qquad q = 1, \qquad \sigma = 1.$$

Les surfaces **F** sont des surfaces cubiques passant simplement par C et a, donc le genre de C est égal 2 et cette courbe ne possède que la seule quadrisécante a. Deux surfaces **F** ont en commun une conique de la congruence et ces surfaces for-

---

(*) F. Deruyts, *Note sur la configuration formée par les quadrisécantes des courbes gauches rationnelles du sixième ordre.* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1898, (3), XXXV, pp. 421-438.)

ment un réseau générateur. Les plans des coniques de la congruence passent par un même point ($n_1 = 1$), ce point est situé sur la droite a. En effet, dans le cas actuel, la surface Ψ dégénère en une gerbe et la droite a doit appartenir à cette gerbe.

A) *La congruence linéaire de coniques ayant une courbe gauche du sixième ordre sextisingulière est le lieu des intersections variables des surfaces cubiques passant par la courbe singulière et par sa quadrisécante. Celle-ci est unique, la courbe singulière est de genre deux et la congruence est de la classe un; tous les plans des coniques de la congruence se coupent en un même point de la quadrisécante.*

Cette congruence a été rencontrée par M. Montesano (*) et, plus récemment, par M. Stuyvaert (**).

23. Envisageons maintenant le cas $\lambda = 7$. On a évidemment $\nu_1 = 1$, et

$$8n_1^2 - 10n_1 + 2 - q\sigma = 0.$$

On en déduit

$$n_1 = \frac{1}{8}\left(5 \pm 3\sqrt{8\sigma + 1}\right).$$

Posons

$$8\sigma + 1 = z^2,$$

d'où

$$8n_1 = 5 + 3z,$$

car il est évident que le signe — est à rejeter. Additionnons les deux dernières égalités après avoir multiplié les deux membres de la première par 5; nous voyons que $z\,(5z + 3)$ est multiple de 8. Un calcul simple, analogue à celui que nous avons effectué plus haut, montre que l'on doit avoir $z = 8\varepsilon + 1$, ε étant un nombre entier positif. Alors, on a

$$n_1 = 3\varepsilon + 1, \qquad q = 2\varepsilon + 1, \qquad \sigma = 2\varepsilon(4\varepsilon + 1).$$

(*) *Sui varii tipi...* (LOC. CIT.)

(**) *Sur certaines courbes gauches du sixième ordre.* (KONINK. AKAD. VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM. Verslag, 1908, pp. 400-406.)

Supposons d'abord qu'il n'existe pas de coniques de la congruence dégénérées en des droites comptées deux fois. Alors les droites $a_1, a_2, \dots, a_p$ sont toutes des quadrisécantes de la courbe singulière C. Cette courbe aura le plus grand nombre de quadrisécantes lorsqu'elle sera rationnelle, donc, d'après un théorème de F. Deruyts (*), on a $p \leq 20$.

Par une des quadrisécantes éventuelles a de C, menons un plan π. Ce plan rencontre encore C en trois points et la droite qui joint deux quelconques de ces points forme avec a une conique de la congruence. Le plan π contient donc trois coniques dégénérées de la congruence et, par suite, la droite a est triple pour chaque surface **F**. Ainsi, on a $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 3$ et

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 = 9p = 8\varepsilon^2 + 2\varepsilon.$$

Une première solution est fournie par $\varepsilon = 0$, $p = 0$. Voyons s'il peut exister d'autres solutions, en nombres entiers et positifs, de l'équation précédente. On a nécessairement

$$\varepsilon = \frac{1}{8}\left(-1 + \sqrt{72p + 1}\right).$$

Posons $z^2 = 72p + 1$. Le produit $(z - 1)(z + 1)$ doit être divisible par 72. L'un des facteurs doit être multiple de 9. D'autre part, si l'un des facteurs est multiple de 4, l'autre est multiple de 2, il suffit donc de considérer les cas suivants : $z = 36\eta + 1$; $z = 18\eta + 1$, $z = 18\eta - 1$, $z = 36\eta - 1$, η étant dans chaque cas un nombre entier et positif. Les valeurs correspondantes de p sont : $p = 72\eta\,(18\eta + 1)$, $p = 36\eta\,(\eta + 1)$, $p = 36\eta\,(\eta - 1)$, $p = 72\eta\,(18\eta - 1)$. Dans chaque cas, p doit être au plus égal à vingt, ce qui exige toujours $\eta = 0$. Nous voyons donc que la courbe C ne peut avoir de quadrisécantes,

---

(*) *Notes sur les sécantes multiples des courbes gauches rationnelles.* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique, 1898, (3), XXXV, pp. 287-294.

car de $\eta = 0$, on conclut $p = 0$. On a $n_1 = 1$, $q = 1$, de sorte que les surfaces **F** deviennent des surfaces cubiques. Les plans des coniques de la congruence forment une gerbe dont le sommet O est un point singulier et, par conséquent, se trouve sur la courbe singulière C. Les surfaces cubiques **F** forment un réseau, chacune de ces surfaces étant le lieu des coniques de la congruence dont les plans passent par une droite contenant le point O.

La classe de la congruence est égale à l'unité.

La courbe C, du septième ordre, étant la base d'un réseau de surfaces cubiques, est de genre cinq (*). Donc :

B) *Une congruence linéaire de coniques possédant une courbe singulière du septième ordre est constituée par le lieu des intersections variables des surfaces cubiques d'un réseau ayant pour base une courbe gauche d'ordre sept et de genre cinq.*

Une courbe gauche d'ordre sept et de genre cinq peut dégénérer en une courbe gauche du sixième ordre et de genre deux et en une quadrisécante de cette courbe. On voit ainsi que la congruence A) du numéro précédent se présente comme cas particulier de la congruence B).

La congruence B) a été étudiée par M. Montesano et rencontrée par M. Veneroni, comme nous l'avons déjà indiqué (ch. I, § 2).

24. Passons au cas général en supposant que la congruence possède des coniques dégénérées en des droites comptées deux fois. De pareilles droites sont des sextisécantes de la courbe singulière C, d'ordre 7.

S'il existait deux sextisécantes de la courbe C, ces droites et la courbe elle-même seraient situées sur une quadrique lieu des droites s'appuyant sur C et sur les sextisécantes. Toute conique s'appuyant en six points sur C appartiendrait à cette quadrique, de sorte que ces coniques ne forment certaine-

---

(*) Stuyvaert, *Cinq études...* (Loc. cit.) (Étude I.)

ment pas une congruence. On supposera donc que la courbe C admet une seule sextisécante a_1 et quelques quadrisécantes $a_2, a_3, \ldots, a_p$.

La droite a_1 fait partie d'une seule conique dégénérée, donc $\alpha_1 = 1$. Chacune des $p - 1$ quadrisécantes de la courbe C fait partie de trois coniques dégénérées appartenant à une même surface **F**, donc $\alpha_2 = \alpha_3 = \ldots = \alpha_p = 3$. On a ainsi

$$8\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 8 - 9p = 0,$$

équation que l'on obtient en égalant les deux valeurs de σ : $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2$, $8\varepsilon^2 + 2\varepsilon$. Un raisonnement analogue à celui qui a été développé au numéro 23 montre que la seule solution possible en nombres entiers est $p = 2$, $\varepsilon = 1$ (on tient compte dans le calcul de la limite supérieure de p).

Pour $\varepsilon = 1$, on a $n_1 = 4$, $q = 3$. Les surfaces **F** sont des surfaces du neuvième ordre passant triplement par la courbe C et sa quadrisécante a_2, simplement par la sextisécante a_1.

Considérons un point P quelconque sur la droite a_2 et construisons la surface **F** relative à ce point. La surface $\mathbf{F}_1$, lieu des bisécantes de C s'appuyant sur a_2, va évidemment faire partie de **F**. Supposons que par un point arbitraire de a_2 passent k bisécantes de C, alors $\mathbf{F}_1$ est d'ordre $k + 3$. $\mathbf{F}_1$ faisant partie d'une surface **F**, d'ordre 9, on a $k \leqq 6$. La courbe C, d'ordre sept, possédant une sextisécante a_1, est rationnelle, elle se projette du point P sur un plan π en une courbe rationnelle C′ possédant un point quadruple et k points doubles. La courbe C′ possède donc en outre un certain nombre de points singuliers équivalents à $9 - k$ points doubles, car une courbe plane d'ordre sept est au plus de genre 15 et un point quadruple abaisse le genre de 6 unités, k points doubles de k unités. Remarquons que par un point quelconque de a_2 il ne passe jamais de trisécante de C, car une pareille droite rencontrerait chaque surface **F** (d'ordre 9) en douze points et appartiendrait ainsi à toutes ces surfaces, ce qui est impossible. Les nouvelles singularités de la courbe C′ proviennent donc de points multiples effectifs (non apparents) de C. Un point multiple de C se trouve nécessairement sur la sextisécante a_1 et il est au plus triple, car autrement il appartiendrait aussi à a_2, ce qui n'est pas possible. Supposons donc que sur a_1 se trouvent x_1 points simples, x_2 points doubles et x_3 points triples de C. On a évidemment

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6,$$
$$x_2 + 3x_3 + k = 9.$$

La surface $\mathbf{F}_1$ passe doublement par la courbe C et une surface $\mathbf{F}$ triplement par la même courbe, de sorte que $\mathbf{F}_1$ n'est certainement pas d'ordre neuf. La surface $\mathbf{F}$ relative au point P se scinde alors en deux surfaces, la surface $\mathbf{F}_1$, d'ordre $k + 3$, et une surface $\mathbf{F}_2$, d'ordre $6 - k$, passant simplement par C. Cette courbe n'est certainement ni plane, ni située sur une quadrique, car alors la congruence cesserait d'exister. On a donc $k \leq 3$.

Une section plane de la surface $\mathbf{F}_1$ a certainement 7 points doubles (sur C); le genre de cette section ne pouvant être négatif, l'ordre de $\mathbf{F}_1$ est au moins égal à 6, ce qui donne $k \geq 3$. On a donc finalement $k = 3$. Un simple calcul donne alors $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

Ainsi la courbe C possède deux points triples sur la droite a_1 (*).

La surface $\mathbf{F}_2$ est du troisième ordre, elle contient la courbe C et les droites a_1, a_2. A chaque point P de a_2 correspond une surface de $\mathbf{F}_2$ et toutes ces surfaces $\mathbf{F}_2$ forment un faisceau, puisque la congruence est linéaire.

Reprenons la surface $\mathbf{F}_2$ relative au point P de a_2. Les coniques de la congruence situées sur $\mathbf{F}_2$ forment évidemment

(*) Ces points sont évidemment doubles pour toutes les surfaces $\mathbf{F}_2$, puisque toute section plane d'une de ces surfaces par a_1 a des points doubles en ces points.

un faisceau dont l'axe d appartient à la surface et passe par P, puisque par hypothèse tous les plans des coniques envisagées passent par ce point. La droite d s'appuie aussi sur la droite a_1, puisque celle-ci intervient sur $\mathbf{F}_2$ comme conique dégénérée du faisceau. Enfin la droite d s'appuie sur C, car toute conique du faisceau contient seulement six points de C. Nous en concluons donc que la surface-enveloppe des plans des coniques de la congruence est le lieu des droites s'appuyant sur la courbe C et les droites a_1, a_2. Cette surface est du quatrième ordre (nous avions déjà trouvé $n_1 = 4$), car toute quadrique lieu des droites s'appuyant sur a_1, a_2 et sur une droite arbitraire b, rencontre C en quatre points en dehors de a_1 et a_2. De plus, cette surface passe simplement par C et a_2, triplement par a_1.

C) *Une seconde congruence linéaire de coniques possédant une courbe sextisingulière d'ordre sept est constituée par les coniques s'appuyant en six points sur une courbe gauche d'ordre sept ayant deux points triples et une seule quadrisécante. L'enveloppe des plans de ces coniques est la surface d'ordre quatre lieu des droites s'appuyant sur la courbe, sur la quadrisécante et sur la droite joignant les deux points triples.*

Cette congruence a été signalée par M. Montesano (*).

25. Envisageons le cas $\lambda = 8$. On a

$$4(n_1\nu_1)^2 - 14(n_1\nu_1) + 1 - 9\sigma = 8,$$

d'où

$$n_1\nu_1 = \frac{1}{4}\left(7 \pm 3\sqrt{4\sigma + 5}\right)$$

On voit immédiatement que le signe — est à rejeter, $n_1\,\nu_1$ devant être positif et le radical étant au moins égal à 3.

(*) *Sui varii tipi*... (Loc. cit., II, p. 18.)

Posons $4\sigma + 5 = z_2$, il vient $n_1\nu_1 = \frac{1}{4}(3z + 7) = \frac{3}{4}(z + 1) + 1$. On voit ainsi que $z + 1$ est multiple de 4, c'est-à-dire que l'on a $z = 4\varepsilon - 1$, ε étant entier et positif. Il vient alors

$$n_1\nu_1 = 3\varepsilon + 1, \qquad q = 2\varepsilon + 1, \qquad \sigma = 4\varepsilon^2 - 2\varepsilon - 1.$$

Soit a une quadrisécante éventuelle de la courbe singulière C. Un plan π passant par a rencontre encore C en quatre points variables et la droite a forme, avec une droite unissant deux de ces points, une conique dégénérée de la congruence; par suite, chaque surface **F** passe six fois par la droite a.

Une sextisécante éventuelle de la courbe C est évidemment simple pour chaque surface **F**. Remarquons qu'il ne peut exister trois pareilles droites, car, dans ce cas, la courbe C serait tout entière sur l'hyperboloïde ayant ces droites comme directrices, et la congruence cesserait d'exister, toutes ses coniques étant situées sur la quadrique.

Nous avons donc à examiner les cas suivants :

a) La courbe C possède p quadrisécantes et ne possède aucune sextisécante. Alors

$$\sigma = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2 = 36p.$$

b) La courbe C possède $p' = p - 1$ quadrisécantes et une sextisécante. Ici

$$\sigma = 36p' + 1.$$

c) La courbe C possède $p'' = p - 2$ quadrisécantes et deux sextisécantes. Dans ce cas, on a

$$\sigma = 36p'' + 2.$$

On a vu que

$$\sigma = 4\varepsilon^2 - 2\varepsilon - 1.$$

Donc, dans le premier cas, on doit avoir

$$36p = 4\varepsilon^2 - 2\varepsilon - 1$$

ou

$$18p = 2\varepsilon^2 - \varepsilon - \frac{1}{2}.$$

Cette équation est impossible pour p, ε entiers et positifs, donc le premier cas doit être rejeté.

Envisageons le second cas b). Alors

$$18p' = 2\varepsilon^2 - \varepsilon - 1,$$

d'où

$$\varepsilon = \frac{1}{4}\left(1 + 3\sqrt{1 + 16p'}\right)$$

Posons $1 + 16p' = z^2$. Alors $(z - 1)\ (z + 1)$ est multiple de 16. Si l'un des facteurs est multiple de 8, l'autre sera pair, il suffit donc de considérer les cas $z = 8\eta + 1$, $z = 8\eta - 1$, η étant entier positif dans chaque cas. Ces cas donnent respectivement pour ε les valeurs $\varepsilon = 6\eta + 1$, $\varepsilon = 6\eta - \frac{1}{2}$. La seconde est évidemment à rejeter.

Ainsi, dans l'hypothèse b), on a $\varepsilon = 6\eta + 1$, $p' = \eta\ (4\eta + 1)$.

Plaçons-nous enfin dans l'hypothèse c). On doit avoir :

$$18p'' = 2\varepsilon^2 - \varepsilon - 1 - \frac{1}{2},$$

équation impossible en nombres entiers.

En résumé, lorsqu'une congruence linéaire de coniques possède une courbe sextisingulière d'ordre huit, on a

$$n_1\nu_1 = 2(9\eta + 2), \qquad q = 3(4\eta + 1), \qquad \sigma = 144\eta^2 + 36\eta + 1.$$

La courbe singulière possède une sextisécante et $\eta\ (4\eta + 1)$ quadrisécantes.

Soit a une des quadrisécantes éventuelles de la courbe C ($\eta < 0$). Si nous désignons par π le genre de C, il passera $15 - \pi$ bisécantes de cette courbe par un point P de a. Mais la surface $\mathbf{F}$ relative au point P passe six fois par a et contient la surface lieu des bisécantes de C s'appuyant sur a, donc $15 - \pi \leq 6$ et $\pi \geq 9$.

D'autre part, si nous projetons la courbe C sur un plan quelconque d'un point commun à C et à la sextisécante, nous voyons que $\pi \leq 5$. Nous arrivons ainsi à une absurdité provenant de ce que nous avons supposé $\eta > 0$. Ainsi on a $\eta = 0$ et $n_1 \nu_1 = 4$, $q = 3$, $\sigma = 1$.

Soit Q un point quelconque de la courbe C. La surface $\mathbf{F}$ relative au point Q va se scinder en une surface $\mathbf{F}_1$ lieu des coniques de la congruence passant par Q_1 et en une surface résidu $\mathbf{F}_2$. La surface $\mathbf{F}_1$ est du sixième ordre, car la courbe C étant triple pour $\mathbf{F}$, une droite issue de Q est la corde de trois coniques de la congruence passant par Q. La surface $\mathbf{F}_2$ est alors du troisième ordre, elle passe simplement par C et par la sextisécante d. La surface $\mathbf{F}_1$ passe doublement par C.

Les surfaces $\mathbf{F}_2$ construites en partant de tous les points de la courbe C forment nécessairement un faisceau et les coniques de la congruence situées sur une de ces surfaces forment un faisceau, sans quoi la congruence ne serait pas linéaire. La courbe C et la droite d forment donc la base d'un faisceau de surfaces cubiques.

Considérons une conique de la congruence et la surface $\mathbf{F}_2$ qui la contient. Le plan de la conique rencontre cette surface en une droite qui s'appuie nécessairement sur d et deux fois sur C. Ainsi, *les plans des coniques de la congruence enveloppent la surface lieu des bisécantes de* C *s'appuyant sur* d.

Si nous construisons la surface $\mathbf{F}$ relative à un point de la droite d, nous voyons qu'elle comprend autant de surfaces $\mathbf{F}_2$ qu'il passe de bisécantes de C par le point choisi. Si k est ce nombre, comme $\mathbf{F}$ est d'ordre 9, on a nécessairement $k \leq 3$. La surface enveloppe Ψ des plans des coniques de la congruence est alors d'ordre $k+1$. Si un plan tangent à Ψ contenait deux coniques de la congruence ($\nu_1 > 1$), il y aurait deux bisécantes de C s'appuyant sur d dans ce plan. Donc si $\nu_1 > 1$, $k > 1$. D'autre part, $k + 1$ doit être un diviseur de 4, puisque $n_1\nu_1 = 4$. Le seule solution possible est évidemment $n_1 = 4$, $\nu_1 = 1$, $k = 3$. La courbe C est alors de genre 3.

Les surfaces F_2 marquent sur un plan passant par d, un faisceau de coniques dont les points-base sont nécessairement sur C; par suite, deux de ces points se trouvent sur la droite d. Par conséquent, la courbe C s'appuie sur la droite d en deux points distincts, et ces points sont nécessairement triples pour la courbe C et doubles pour les surfaces F_2, puisque toute section plane d'une de ces surfaces passant par d a des points doubles en ces points.

D) *L'unique congruence linéaire de coniques admettant une courbe sextisingulière du huitième ordre est constituée par les coniques s'appuyant en six points sur une courbe du huitième ordre et de genre trois ayant deux points triples* (*).

On voit que si la courbe du huitième ordre dégénère en une courbe rationnelle du septième ordre, dotée de deux points triples, jointe à sa quadrisécante, on retrouve la congruence c) du numéro 24.

En résumé : *Si une congruence linéaire de coniques possède une courbe sextisingulière, cette courbe est*

1° *D'ordre huit, de genre trois, dotée de deux points triples, éventuellement dégénérée en une courbe rationnelle du septième ordre jointe à sa quadrisécante et dotée de deux points triples;*

2° *D'ordre sept, de genre cinq, éventuellement dégénérée en une courbe du sixième ordre, de genre deux, jointe à sa quadrisécante* (**).

(*) Cette congruence a été signalée par M. MONTESANO, *Sui varii tipi...* (LOC. CIT., pp. 15 et suiv.)

(**) Ces congruences ont été rencontrées par M. Montesano, mais ce géomètre ne prouve pas que les congruences A (n° 22) et C (n° 24) sont les seuls cas particuliers des congruences B (n° 23) et D (n° 25) donnant une seule courbe sextisingulière.

§ 4. — *Congruences linéaires de coniques ayant une courbe bisingulière et une courbe quartisingulière.*

26. Considérons une congruence linéaire de coniques Γ, possédant une courbe bisingulière C_1 d'ordre λ_1 et une courbe quartisingulière C_2 d'ordre λ_2. On a $\lambda_1 \geq 2$ (*), $\lambda_2 \geq 4$.

Les équations (3) et (5) du numéro 20 deviennent ici :

$$(2n_1\nu_1 + 1)^2 = 2n_1\nu_1 + \lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 + \sigma, \tag{1}$$

$$2n_1\nu_1 + 1 = q_1 + 2q_2. \tag{2}$$

Éliminons $2n_1\nu_1$ entre ces équations, elles deviennent

$$(\lambda_2 - 4)q_2^2 - 2(2q_1 - 1)q_2 + (\lambda_1 - 1)q_1^2 + q_1 + \sigma - 1 = 0. \tag{3}$$

Le discriminant de l'équation (3), où q_2 est considéré comme inconnue, doit être positif ou nul, car q_2 est un nombre entier et par suite est réel. Ainsi

$$(4\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2)q_1^2 - \lambda_2(q_1 - 1) - (\lambda_2 - 4)\sigma - 3 > 0. \tag{4}$$

On a $q_1 \geqq 1$, $\lambda_2 \geqq 4$, de sorte que $\lambda_2(q_1 - 1) + (\lambda_2 - 4)\sigma + 3$ est certainement positif. L'inégalité précédente entraîne donc

$$4\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 > 0. \tag{5}$$

Puisque $\lambda_1 \geq 2$, $\lambda_1 - 1$ est positif et l'on a

$$\lambda_2 < \frac{4\lambda_1}{\lambda_1 - 1} \quad \text{ou} \quad 4 + \frac{4}{\lambda_1 - 1}$$

La plus grande valeur de la fraction $\frac{4}{\lambda_1 - 1}$ est atteinte pour $\lambda_1 = 2$; donc $\lambda_2 < 8$. L'ordre de la courbe C_2 peut donc prendre les valeurs $\lambda_2 = 4, 5, 6, 7$.

(*) Le cas $\lambda_1 = 1$ rentre dans la première catégorie (chap. III, § 2).

Pour $\lambda_2 = 4$, le polynôme $4\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2$ est positif quelle que soit la valeur attribuée à λ_1. Pour $\lambda_2 = 5$, on a $4\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1\lambda_2 = 5 - \lambda_1 > 0$, et λ_1 peut prendre les valeurs 2, 3, 4. Si $\lambda_2 = 6$, 7, λ_1 peut seulement prendre la valeur $\lambda_1 = 2$. Ainsi :

Si une congruence linéaire de coniques possède une ligne bisingulière C_1 et une ligne quartisingulière C_2, ou bien C_2 est une quartique et C_1 est d'ordre quelconque (≥ 2); ou bien C_2 est une quintique et C_1 est une conique, une cubique ou une quartique; ou enfin C_1 est une conique et l'ordre de C_2 est égal à six ou sept.

27. Considérons en premier lieu une congruence linéaire formée par les coniques s'appuyant en quatre points sur une quartique gauche C_2 de première espèce et deux points sur une courbe C_1, d'ordre λ_1. Soit k le nombre des points d'appui de la courbe C_1 sur la quartique C_2.

La courbe C_2 est la base d'un faisceau de quadriques $|Q|$. Une quadrique Q de ce faisceau $|Q|$ contient toutes les coniques de la congruence passant par un quelconque de ses points (en dehors de C_2). Ces coniques sont en nombre simplement infini et forment par conséquent un faisceau, car autrement la congruence ne serait pas linéaire. Les plans des coniques situées sur la quadrique Q ont donc en commun une droite d. Lorsque la quadrique Q varie dans le faisceau $|Q|$, la droite d décrit une surface Ψ, la surface-enveloppe de la congruence.

Une quadrique Q rencontre la courbe C_1 en $2\lambda_1 - k$ points en dehors de C_2; par chacun de ces points passent des coniques de la congruence en nombre infini, et toutes ces coniques appartiennent à Q. On en conclut que les points d'intersection considérés sont aussi les points communs à la quadrique Q et à la droite d relative. Par suite $2\lambda_1 - k = 2$, c'est-à-dire $k = 2(\lambda_1 - 1)$. Les droites d sont des bisécantes de la courbe C_1 et celle-ci possédant une série linéaire d'ordre 2, est hyperelliptique.

Si dans un plan tangent à la surface Ψ se trouvent généralement ν_1 coniques de la congruence, une même droite d de Ψ correspond à ν_1 quadriques du faisceau $|Q|$. Chaque droite d a $2\nu_1$ points communs avec la courbe C_1. Si $\nu_1 > 2$, cette courbe admet donc une infinité de $2\nu_1$ — sécantes. On a $2\nu_1 \leq \lambda_1$.

Reprenons les équations (1) et (2) du numéro 26; elles deviennent

$$4(n_1\nu_1)^2 + 2n_1\nu_1 + 1 = \lambda_1 q_1^2 + 4q_2^2 + \sigma,$$

$$2n_1\nu_1 + 1 = q_1 + 2q_2.$$

On a $q_1 = 1$, car un plan tangent à la surface Ψ ne contient qu'une conique de la congruence passant par un des points de C_1 situés dans le plan considéré. Par suite, $q_2 = n_1\nu_1$.

Nous distinguerons deux cas, suivant que la courbe C_1 est gauche ou plane.

a) C_1 est une courbe gauche, hyperelliptique, de genre π. Soit a_1 une droite qui forme, avec une infinité d'autres droites, des coniques dégénérées de la congruence. La courbe C_2 n'ayant ni quadrisécante ni trisécante, la droite a_1 est nécessairement une bisécante commune aux courbes C_1, C_2, dont les points d'appui sur ces courbes sont distincts. Un plan passant par a_1 contient une seule droite qui forme, avec a_1, une conique dégénérée de la congruence, donc a_1 est simple pour chaque surface **F**. Le nombre des droites analogues à a_1 est égal à $\lambda_1 - 2\pi - 1$ et l'on a $\sigma = \lambda_1 - 2\pi - 1$. On en déduit $n_1\nu_1 = \lambda_1 - \pi - 1$.

Si une congruence linéaire de coniques admet deux lignes singulières gauches dont une quartique de première espèce quartisingulière, la surface-enveloppe de la congruence est une réglée d'ordre n_1 *et la courbe bisingulière, d'ordre* λ_1, *est hyperelliptique (de genre* π), *s'appuie en* $2(\lambda_1 - 1)$ *points sur la quartique et rencontre chaque génératrice de la surface enveloppe en* $2\nu_1$ *points. La classe de la conguence est égale à* $n_1\nu_1$.

Un exemple de congruence linéaire pour lequel ν_1 est supérieur à un est donné par $\lambda_1 = 5$, $n_1 = 2_1$, $\nu_1 = 2$. On sait, en effet, que sur une quadrique on peut tracer une courbe d'ordre cinq rencontrant toutes les génératrices d'un même système en quatre points (*).

b) C_1 est une courbe plane, hyperelliptique, de genre π.

Soit γ le plan de la courbe C_1. Les points d'intersection de C_2 avec γ sont des points multiples d'indice t pour C_1, et l'on a $\lambda_1 = 2t + 1$, $\pi \leq t$.

Dans le cas actuel, x est certainement nul, de sorte que l'on a $\lambda_1 = 2n_1\nu_1 + 1$, c'est-à-dire $n_1\nu_1 = t$. La surface-enveloppe Ψ devient une courbe de classe n_1 du plan γ.

Si une congruence linéaire de coniques possède une quartique gauche de première espèce quartisingulière et une courbe plane bisingulière, celle-ci est d'ordre $2t + 1$, *a quatre points multiples d'indice* t *sur la quartique, et est hyperelliptique de genre inférieur à* t.

Les congruences rencontrées dans ce numéro ont été signalées pour $\nu_1 = 1$ par M. Montesano (**). Quelques cas particuliers ont été étudiés par M. Pieri (***).

28. Considérons actuellement une congruence linéaire de coniques ayant une quartique gauche de seconde espèce C_2 quartisingulière et une courbe C_1, d'ordre λ_1, bisingulière $(\lambda_1 \geq 2)$.

Soit k le nombre de points communs aux courbes C_1, C_2. La courbe C_1 ne peut se trouver sur la quadrique lieu des trisécantes de C_2, car alors la congruence de coniques serait d'ordre zéro ; donc $k \leq 2\lambda_1$.

Une trisécante a de C_2 s'appuyant sur C_1, forme, avec une

(*) Bertini, *Sulle curve gobbe razionali del 5° ordine*. (In memoriam D. Chelini. Collectanea Mathematica. Milano, Hœpli, 1881, pp. 313-326.)

(**) *Sui varii tipi...* (Loc. cit.)

(***) *Sopra alcune congruenze...* (Loc. cit.)

droite s'appuyant sur a, C_1, C_2, une conique dégénérée de la congruence. Dans un plan passant par a se trouvent $\lambda_1 - 1$ droites formant avec a de pareilles coniques dégénérées, donc la droite a est multiple d'ordre $\lambda_1 - 1$ sur toute surface $\mathbf{F}$. La surface $\mathbf{F}$ relative à un point P de a se scinde en deux surfaces dont l'une est le lieu des droites s'appuyant sur a, C_1 et C_2. La multiplicité de a pour cette dernière surface ne peut donc excéder $\lambda_1 - 1$. Cette multiplicité est égale au nombre de droites s'appuyant sur C_1, C_2 (en des points distincts) que l'on peut mener par P, c'est-à-dire à $4\lambda_1 - k - 3$. Ainsi $4\lambda_1 - k - 3 \leq \lambda_1 - 1$, c'est-à-dire $k \geq 3\lambda_1 - 2$.

S'il existe une trisécante de C_2 s'appuyant sur C_1, on doit donc avoir $2\lambda_1 \geq k \gtrless 3\lambda_1 - 2$, c'est-à-dire $\lambda_1 = 2$, $k = 4$. Il ne peut donc pas exister de telles trisécantes, c'est-à-dire $k = 2\lambda_1$.

Supposons qu'il existe une droite a' s'appuyant deux fois sur chacune des courbes C_1, C_2 (en des points distincts). Toute bisécante de C_2 s'appuyant sur a' forme avec cette droite une conique dégénérée de la congruence. Un plan passant par a' coupe encore C_2 en deux points, donc a' est simple pour toute surface $\mathbf{F}$. Si nous construisons la surface $\mathbf{F}$ relative à un point de la droite a', nous voyons que cette surface se scinde en deux autres dont l'une est le lieu des bisécantes de C_2 s'appuyant sur a'. Par conséquent cette droite doit être simple pour cette dernière surface. Mais, d'autre part, par tout point de a' passent encore deux autres bisécantes de C_2 et la surface formée par ces bisécantes passe doublement par a'. Pour éviter toute contradiction, nous devons supposer que les courbes C_1, C_2 n'ont aucune bisécante commune (les points d'appui étant distincts). En utilisant un théorème classique de Halphen donnant le nombre de droites communes à deux congruences réglées, on trouve

$$6\pi = (\lambda_1 - 2)(\lambda_1 - 3),$$

π étant le genre de la courbe C_1.

Considérons les coniques passant par un point P_1 de C_1, elles rencontrent encore C_1 en un second point P_2 qui peut être mobile ou fixe.

Si le point P_2 est variable, nous avons une correspondance birationnelle entre les points de C_1 et les coniques de la congruence passant par P_1. Le lieu de ces coniques est une surface algébrique sur laquelle elles forment un faisceau, car la congruence est linéaire. Ce faisceau a un point-base P_1 et par conséquent, d'après un théorème de Lüroth, il est linéaire (*). Par suite $\pi = 0$.

Si le point P_2 est fixe, les coniques passant par P_1, P_2 engendrent une surface Π, d'ordre $\rho + 2$, passant ρ fois par la droite $P_1 P_2$ et ayant des points multiples d'indice $\rho + 1$ en P_1, P_2. Mais, d'après un théorème de M. Bertini (**), « si la surface générique d'un système linéaire a un point multiple d'indice t variable, le lieu de ce point est une variété-base multiple d'indice $t - 1$ pour le système linéaire ». La surface Π engendre un faisceau lorsque P_1 varie sur C_1, car par tout point de l'espace passe une conique de la congruence déterminant deux points sur la courbe C_1, l'un de ces points pourra être pris pour P_1, l'autre pour P_2, mais chaque arrangement donnera évidemment la même surface Π. La droite $P_1 P_2$ décrit une surface réglée qui ne peut faire partie de la base du faisceau des surfaces Π, donc $\rho \leq 1$. Les surfaces Π passant par C_2, si l'on a $\rho = 0$, cette courbe serait de première espèce (commune à une infinité de quadriques), ce qui a été exclu par hypothèse.

Lorsque $\rho = 1$, les surfaces Π sont du troisième ordre et passent par C_1, C_2, donc $\lambda_1 \leq 5$. Nous avons vu que $6\pi = (\lambda_1 - 2)(\lambda_1 - 3)$, donc pour $\lambda_1 = 5$, $\pi = 1$, pour $\lambda_1 = 4$,

---

(*) Voir par exemple Castelnuovo et Enriques, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*. Chap. II, § 6, observation. (Annali di Matematica, 1901, 3e sér., t. VI, pp. 165-225.)

(**) Bertini, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi*. Chap. X, no 8. Pisa, Spoerri, 1907.

$\pi = \frac{1}{3}$, pour $\lambda_1 = 2, 3$, $\pi = 0$. Mais la courbe-intersection de deux surfaces cubiques est de genre dix, et par conséquent (*), si $\lambda_1 = 5$, $\pi = 3$, ce qui est en contradiction avec ce qui vient d'être dit. Le genre d'une courbe étant entier, le cas $\lambda_1 = 4$ doit aussi être rejeté, et nous voyons que dans chaque cas, que le point P_2 soit mobile ou non quand P_1 est fixé, on a $\pi = 0$. $\lambda_1 = 2, 3$.

Si $\lambda_1 = 2$, il existe une infinité de quadriques passant par la conique C_1 et par une conique quelconque de la congruence. Ces quadriques rencontrent C_2 en $k + 4 = 8$ points, donc il est possible de trouver une quadrique contenant C_1, C_2 et par conséquent toute conique de la congruence. Le cas $\lambda_1 = 2$ doit ainsi être exclu.

Lorsque $\lambda_1 = 3$, on a $k = 6$ et la courbe C_1 est une cubique gauche, car si c'était une cubique plane, elle aurait au moins deux points doubles sur C_2, ce qui est impossible.

Par treize points de C_2 et par quatre points de C_1 passent des surfaces cubiques formant un réseau et contenant les courbes C_1, C_2. Une conique quelconque de la congruence est située sur une infinité de ces surfaces cubiques. On en conclut que la congruence envisagée ici est un cas particulier de la congruence du numéro 23 (la courbe d'ordre sept et de genre cinq dégénère en deux courbes rationnelles C_1, C_2 ayant six points communs). La congruence est donc de classe un et les plans de ses coniques passent par un point fixe de C_1.

Si une congruence linéaire de coniques possède une quartique gauche de seconde espèce quartisingulière et une courbe bisingulière, celle-ci est une cubique gauche s'appuyant en six points sur la quartique, et la congruence est de classe un.

(*) Nous employons ici la formule $\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1$ donnant le genre π d'une courbe composée de deux courbes de genres π_1, π_2 ayant i points communs. Pour des détails, consulter : ENRIQUES, *Intorno ai fondamenti della Geometria sopra le superficie algebriche.* (ATTI DELLA R. ACCAD. DI TORINO, 1901, XXXVII.)

Comme vérification, si l'on fait $n_1 = \nu_1 = q_1 = q_2 = 1$, $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 4$, $\sigma = 0$ dans les formules (1) et (2) du numéro 26, on trouve des identités.

29. Du théorème énoncé au numéro 26, on déduit que si une congruence linéaire de coniques possède une conique C_1 bisingulière et une courbe C_2 d'ordre λ_2 quartisingulière, on a $\lambda_2 = 4, 5, 6, 7$. Le cas $\lambda_2 = 4$ a déjà été examiné implicitement (n° 27), nous nous bornerons donc à étudier les cas $\lambda_2 = 5, 6, 7$.

Au début du paragraphe 2 de ce chapitre, nous avons fait correspondre à chaque congruence linéaire de coniques un système doublement infini de quadriques Φ relativement à un système linéaire quintuplement infini, choisi d'une façon arbitraire. Remarquons que toute conique d'une congruence linéaire ayant une conique bisingulière C_1 est située sur une quadrique d'un système linéaire triplement infini dont les éléments contiennent C_1. Ce nouveau système peut évidemment être substitué au système quintuplement infini et le système Φ sera formé par des quadriques contenant C_1. Si alors on construit la surface **F**, lieu des coniques de la congruence dont les plans passent par un point fixe, on voit que cette surface, d'ordre $2n_1\nu_1 + 1$, passe $n_1\nu_1$ fois par C_1. Les formules (1) et (2) du numéro 26 deviennent ainsi :

$$2(n_1\nu_1)^2 + 2(n_1\nu_1) + 1 = \lambda_2 q_2^2 + \sigma,$$
$$2q_2 = n_1\nu_1 + 1.$$

On en déduit

$$q_2 = \frac{1}{8-\lambda_2}\left(2 \pm \sqrt{4 + (\sigma - 1)(8 - \lambda_1)}\right)$$

Un calcul simple montre que les solutions sont de la forme :

$$\lambda_2 = 7, \quad n_1\nu_1 = 2\varepsilon + 3, \quad q_2 = \varepsilon + 2, \quad \sigma = \varepsilon^2 - 3;$$
$$\lambda_2 = 6, \quad n_1\nu_1 = 2\varepsilon + 1, \quad q_2 = \varepsilon + 1, \quad \sigma = 2\varepsilon^2 - 1;$$
$$\lambda_2 = 5, \quad n_1\nu_1 = 2\varepsilon + 1, \quad q_2 = \varepsilon + 1, \quad \sigma = 3\varepsilon^2 + 2\varepsilon,$$

ε étant, dans chaque cas, un nombre entier positif.

Supposons qu'il existe une trisécante a de C_2 s'appuyant sur la conique C_1. Cette droite est multiple d'ordre $\lambda_2 - 3$ pour chaque surface $\mathbf{F}$, car elle forme une conique de la congruence avec une droite s'appuyant sur a, C_1, C_2. Or, le lieu de ces droites est une surface passant $2\lambda_2 - k - 3$ fois par a, k étant le nombre de points communs à C_1, C_2. Si l'on construit la surface $\mathbf{F}$ relative à un point de a, on voit que $2\lambda_2 - k - 3 \leq \lambda_2 - 3$, c'est-à-dire $k \geq \lambda_2$. Mais la courbe C_2 étant d'ordre λ_2, elle ne peut rencontrer le plan de C_1 en plus de λ_2 points, donc $k = \lambda_2$ (dans l'hypothèse où C_2 admet des trisécantes s'appuyant sur C_1).

Considérons une droite d et un point P. Les plans passant par d marquent sur C_2 les groupes d'un série linéaire $g^1_{\lambda_2}$, ceux qui passent par P marquent une série linéaire $g^2_{\lambda_2}$. D'après une formule de M. Schubert (*), le nombre de groupes de trois points communs à ces deux séries est égal à $\lambda_2 \binom{\lambda_2 - 1}{2} - (\lambda_2 - 2)(\lambda_2 + \pi - 1)$, π étant le genre de C_2. Ces groupes sont les groupes marqués par les trisécantes de C_2 s'appuyant sur d et les $\binom{\lambda_2}{3}$ groupes de trois points situés dans le plan joignant d et P. On en conclut que le lieu des trisécantes de C_2 est une surface d'ordre $\frac{1}{3} \lambda_2 (\lambda_2 - 2)(\lambda_2 - 4) - (\lambda_2 - 2)(\pi - 1)$. Cette surface passe $\binom{\lambda_2 - 2}{2} - \pi$ fois par C_2, par conséquent, le nombre des trisécantes de C_2 s'appuyant sur C_1 est égal à $\frac{1}{6} (\lambda_2 - 2)[4\lambda_2^2 - (16 + 3k)\lambda_2 + 3(4 + 3k)] - \pi(2\lambda_2 - k - 4)$. Ce nombre doit être supérieur ou égal à zéro. S'il est supérieur à zéro, nous avons vu que l'on a $k = \lambda_2$. On vérifie facilement que cela est impossible (pour $k = \lambda_2$, on trouve un nombre négatif). On doit donc avoir

$$(\lambda_2 - 2)[4\lambda_2^2 - (16 + 3k)\lambda_2 + 3(4 + 3k)] = 6\pi(2\lambda_2 - k - 4),$$

(*) Une démonstration simple et élégante de la formule de M. Schubert a été donnée par M. Severi dans ses *Lezioni di Geometria Algebrica*. Padova, Draghi, 1908, pp. 236 et suivantes.

c'est-à-dire qu'il n'y a pas de trisécante de C_2 s'appuyant sur C_1.

Les solutions en nombres entiers ($5 \leq \lambda_2 \lesssim 7$) de cette équations sont :

$$\lambda_2 = 7, \quad \pi = 5, \quad k = 6; \qquad \lambda_2 = 7, \quad \pi = 6, \quad k = 5;$$
$$\lambda_2 = 6, \quad \pi = 2, \quad k = 6; \qquad \lambda_2 = 6, \quad \pi = 4, \quad k = 4;$$
$$\lambda_2 = 5, \quad \pi = 1, \quad k = 5; \qquad \lambda_2 = 5, \quad \pi = 2, \quad k = 4.$$

Examinons ces cas séparément :

Une courbe d'ordre sept et de genre ≥ 5 n'admet pas de quadrisécante, donc si $\pi = 5$, $k_2 = 6$, $\lambda_2 = 7$, on a $\sigma = 0$, c'est-à-dire $\varepsilon^2 = 3$, équation impossible en nombre entier.

Si $\lambda_2 = 7$, $\pi = 6$, $k = 5$, les courbes C_1, C_2 ont une bisécante commune, multiple d'ordre 10 pour toute surface $\mathbf{F}$; donc $\sigma = 100$ et $\varepsilon^2 = 97$, équation impossible en nombre entier. On voit donc qu'il n'existe pas de congruence pour $\lambda_2 = 7$.

Lorsque l'on a $\lambda_2 = 6$, $\pi = 2$, $k = 6$, la courbe C_2 admet une seule quadrisécante a, et cette quadrisécante est simple pour toute surface $\mathbf{F}$. Par suite $\sigma = 1$, $\varepsilon = 1$, $n_1 \nu_1 = 3$, $q_2 = 2$. On a d'ailleurs $\nu_1 = 1$ et une première congruence.

Lorsque $\lambda_2 = 6$, $\pi = 4$, $k = 4$, la courbe C_2 n'admet pas de quadrisécante, mais elle admet une bisécante dans le plan de C_1. Cette droite est multiple d'indice 6 pour chaque surface $\mathbf{F}$ et on a $\sigma = 36$, c'est-à-dire $2\varepsilon^2 = 37$, ce qui est impossible.

Si $\lambda_2 = 5$, $\pi = 1$, $k = 5$, la courbe C_2 n'admettant pas de quadrisécante, on a $\sigma = 0$, c'est-à-dire $\varepsilon = 0$, $n_1 \nu_1 = 1$, $q_2 = 1$. Évidemment $\nu_1 = 1$, $n_1 = 1$.

Si enfin $\lambda_2 = 5$, $\pi = 2$, $k = 4$, on a $\sigma = 0$, $\varepsilon = 0$, $n_1 = 1$, $q_1 = 1$.

En résumé, nous avons trois congruences possibles :

a) $\lambda_2 = 6$, $n_1 = 3$, $\nu_1 = 1$, $q_1 = 3$, $q_2 = 2$, $\sigma = 1$, $\pi = 2$, $k = 6$,
b) $\lambda_2 = 5$, $n_1 = 1$, $\nu_1 = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $\sigma = 0$, $\pi = 1$, $k = 5$,
c) $\lambda_2 = 5$, $n_1 = 1$, $\nu_1 = 1$, $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $\sigma = 0$, $\pi = 2$, $k = 4$,

Nous avons déjà vu (n° 22) qu'il existe un faisceau de surfaces cubiques passant par la courbe C_2, d'ordre six et de genre deux, par la conique C_1 et par la quadrisécante a de C_2. Par un point P de l'espace passe une conique de la congruence a) et une surface cubique contenant ses courbes singulières; donc cette surface rencontre la conique en sept points et par suite la contient tout entière. Nous voyons ainsi que les coniques de la congruence a) se distribuent par faisceaux sur les surfaces cubiques d'un faisceau. Considérons une de ces surfaces. Les coniques de la congruence qu'elle contient sont dans les plans d'un faisceau dont l'axe appartient à la surface cubique et par suite s'appuie sur a et deux fois sur C_2. La surface-enveloppe de la congruence est donc le lieu des bisécantes de C_2 s'appuyant sur a. C'est une surface cubique passant doublement par a.

Passons à la congruence b). Par la conique C_1 et par une courbe quelconque de la congruence passent une infinité de quadriques formant un faisceau. Les dix points de rencontre de C_2 avec une quadrique de ce faisceau se répartissent en cinq points fixes sur C_1, quatre points fixes sur la conique de la congruence choisie, et enfin un point mobile. Il en résulte que les points de la courbe C_2 peuvent être rapportés birationnellement aux quadriques d'un faisceau, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\pi = 1$. La congruence b) n'existe donc pas.

Enfin, les surfaces F relatives à la congruence c) sont du troisième ordre et forment un réseau. Les plans des coniques de cette congruence passent par un point fixe P situé sur la courbe C_2 dans le plan de C_1, mais en dehors de cette courbe. En effet, une droite d passant par P et située dans le plan de C_1, forme, avec une trisécante de C_2 s'appuyant sur d, une conique de la congruence, et il existe une infinité de pareilles coniques dégénérées. La congruence c) est un cas particulier de la congruence du numéro 23. (La courbe d'ordre sept et de genre cinq dégénère en deux courbes C_1, C_2, l'une rationnelle, l'autre de genre deux, se coupant en quatre points.)

Si une congruence linéaire de coniques possède une conique bisingulière et une seconde quartisingulière d'ordre au moins égal à cinq, celle-ci est :

1° *Une courbe d'ordre six, de genre deux, s'appuyant en six points sur la conique, et la congruence est de classe trois ;*

2° *Une courbe d'ordre cinq, de genre deux, s'appuyant en quatre points sur la conique, et la congruence est de classe un.*

Ces congruences ont été signalées par MM. Pieri (*) et Montesano (**).

30. Il nous reste à examiner s'il peut exister une congruence linéaire formée par des coniques s'appuyant en quatre points sur une courbe C_2 d'ordre cinq et en deux points sur une courbe C_1 d'ordre trois ou quatre.

Supposons d'abord que C_1 est du troisième ordre, et soit k le nombre de points communs à C_1 et C_2.

S'il existe une trisécante a de C_2 s'appuyant sur C_1, elle forme une conique de la congruence avec toute droite s'appuyant sur a, C_1, C_2. Par conséquent, la droite a est quadruple pour chaque surface **F**; mais elle est multiple d'ordre $12-k$ pour la surface engendrée par les droites s'appuyant sur a, C_1, C_2, donc $12-k \leq 4$, $k \geq 8$.

Les trisécantes de C_2 engendrent généralement une surface (sauf dans le cas où C_2 a un point triple), et cette surface est d'ordre $8-3\pi$, π étant le genre de la courbe C_2 (n° 29) ; cette surface passe $3-\pi$ fois par C_2, car le cône qui projette C_2 d'un de ses points est de genre π et a donc $3-\pi$ droites doubles. La courbe C_1 ne peut se trouver sur la surface lieu des trisécantes de C_2, donc $k \leq 3\,\frac{8-3\pi}{3-\pi}$. Les deux inégalités trouvées exigent $\pi=0$, $k=8$, et ainsi, dans l'hypothèse où il y a des trisécantes de C_2 s'appuyant sur C_1, et où les trisécantes de C_2 forment une surface, on trouve que la courbe C_1 rencontre

(*) *Sopra alc. congr...* (Loc. cit.)
(**) *Sui varii tipi...* (Loc. cit.)

cette surface seulement en des points de C_2 et que par conséquent on peut admettre qu'il n'y a pas de trisécante de C_2 s'appuyant sur C_1.

Dans cette nouvelle hypothèse, si $\pi \geq 1$, on doit avoir

$$3(8-3\pi)=k(3-\pi),$$

c'est-à-dire $\pi=2$, $k=6$. Si $\pi=0$, la courbe C_2 (on exclut le cas où C_2 a un point triple) *a* ou une seule quadrisécante, quadruple pour la surface des trisécantes, ou une infinité de quadrisécantes formant une quadrique (*). Dans le premier cas, on trouve $k=8$; dans le second, $k=2\varepsilon$ et la courbe C_1 a $3-\varepsilon$ bisécantes s'appuyant quatre fois sur C_2, ε étant entier et positif.

Il nous reste à examiner le cas où la courbe C_2 a un point triple $P\,(\pi=\nu)$. On vérifie comme précédemment que l'existence d'une droite issue de P s'appuyant une seule fois sur C_1 est impossible, par suite, $k=6$. Si C_1 est gauche, il existe une bisécante a de C_1 issue de P; cette droite forme, avec une droite issue de P et s'appuyant une seconde fois sur C_2, une conique dégénérée de la congruence.

Ainsi, les différentes congruences qui peuvent se présenter sont caractérisées par les faits suivants :

a) La courbe C_2 est de genre deux et C_1 s'appuie en six points sur C_2.

b) La courbe C_2 est rationnelle et admet une seule quadrisécante. C_1 rencontre C_2 en huit points et est donc une cubique gauche.

c) La courbe C_2 est rationnelle et admet ∞^1 quadrisécantes dont $3-\varepsilon$ sont des bisécantes de C_1; cette courbe s'appuie en 2ε points sur C_2.

d) La courbe C_2 a un point triple et s'appuie en six points sur C_1.

(*) Bertini, *Sulle curve gobbe...* (Loc. cit.)

Dans les hypothèses a), c) ($\varepsilon = 3$), d), la courbe C_1 pourrait être plane et avoir par suite un point double en un de ses six points d'appui sur C_2. Une conique de la congruence ne peut pas dégénérer en deux droites dont l'une soit dans le plan de C_1 ; par suite, chaque surface $\mathbf{F}$ rencontre ce plan seulement en des points de C_1 et, dans les équations (1), (2) du numéro 26, on aura $2n_1\nu_1 + 1 = 3q_1$. Cela amène à l'équation $3q_1 + x = 1$, impossible en nombres entiers tels que $q_1 \geq 1$. C_1 est donc toujours gauche.

Congruence a) : Les courbes C_1, C_2 ont une bisécante com-commune a, triple pour les surfaces $\mathbf{F}$. La courbe C_2 se trouve sur ∞^5 surfaces cubiques formant un système linéaire (*), donc C_1, C_2 et a forment la base d'un faisceau de surfaces cubiques. Toute conique de la congruence est sur une de ces surfaces et les coniques situées sur une même surface forment un faisceau, car autrement la congruence ne serait pas linéaire. On en conclut que l'enveloppe Ψ des plans des coniques de la congruence est le lieu des droites s'appuyant sur C_1, C_2, a. C'est donc une surface du huitième ordre passant cinq fois par a, trois fois par C_1 et une fois par C_2.

Cherchons à évaluer q_1, c'est-à-dire la multiplicité d'un point Q de C_1 pour la surface $\mathbf{F}$, lieu des coniques dont les plans passent par un point P. q_1 sera égal au nombre de droites de la surface-enveloppe Ψ s'appuyant sur la droite PQ, c'est-à-dire à cinq. De même, $q_2 = 7$. Mais nous avons trouvé $n_1 = 8$ et de plus on a $\nu_1 = 1$. Il est maintenant facile de voir que l'égalité (2)

$$2n_1\nu_1 + 1 = q_1 + 2q_2$$

du numéro (26) ne subsiste plus, de sorte que la congruence a) n'existe pas.

Congruence b) : Les courbes C_1, C_2 et la quadrisécante a de C_2 sont la base d'un faisceau de surfaces cubiques. En rai-

---

(*) Stuyvaert, *Cinq études* .. (Loc. cit., pp. 38 et suiv.)

sonnant comme précédemment, on voit que la surface-enveloppe Ψ est le lieu des droites s'appuyant sur a, C_1, C_2, c'est-à-dire une surface d'ordre dix passant sept fois par a, une fois par C_1 et trois fois par C_2. On en conclut que $q_1 = 9$, $q_2 = 7$ et la congruence *b*) n'existe pas pour la même raison que la congruence a).

Congruence *c*) : Si les courbes C_1, C_2 ont une bisécante commune a, celle-ci est triple pour chaque surface **F**, mais quintuple pour le lieu des bisécantes de C_2 s'appuyant sur a, de sorte qu'il ne peut exister de pareilles bisécantes. En évaluant le nombre des bisécantes communes à C_1, C_2 et en comptant chaque quadrisécante de C_2 bisécante de C_1 six fois, on ne trouve jamais zéro, de sorte que la congruence *c*) n'existe pas.

Congruence *d*) : Soit P le point triple de C_2, a la bisécante de C_1 issue de P. Par le point P, par dix points de C_1 et par sept points de C_2 différents de P passent ∞^1 surfaces cubiques formant un faisceau dont la base est composée par a, C_1 et C_2. Répétons le raisonnement déjà fait pour la congruence *a*); on voit que la surface-enveloppe Ψ est la surface du cinquième ordre ($n_1 = 5$) passant trois fois par a, deux fois par C_1 et une fois par C_2, lieu des droites s'appuyant sur a, C_1 et C_2. On a évidemment $\nu_1 = 1$. De plus, $q_1 = 3$, $q_2 = 4$ et la formule (2) du numéro 26 est possible.

La droite a est double pour chaque surface **F**, de sorte que $\sigma = 4$, et la formule (1) (n° 26) est également vérifiée.

Si une congruence linéaire de coniques possède une quintique quartisingulière et une cubique bisingulière, la quintique a un point triple, la cubique est gauche et s'appuie en six points sur la quintique. La congruence est de classe cinq.

Cette congruence a été rencontrée par M. Montesano (*).

(*) *Sui varii tipi...* (Loc. cit.)

31. Pour terminer l'énumération des congruences linéaires de coniques, admettant une courbe quartisingulière et une courbe bisingulière, il nous reste à examiner le cas $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 5$ (n° 26), le raisonnement présentant de grandes analogies avec celui du numéro précédent.

On commence par démontrer qu'il ne peut exister de trisécantes de C_2 s'appuyant sur C_1. Alors si C_2 n'est pas unicursale, il peut se présenter les trois cas suivant :

a) C_2 est de genre deux, C_1 de genre un et s'appuie huit fois sur C_2. Les deux courbes n'ont pas de bisécantes communes.

b) C_2 est de genre deux, C_1 est rationnelle et s'appuie en huit points sur C_2. Les deux courbes C_1, C_2 ont, si C_1 est gauche, quatre bisécantes communes.

c) C_2 est elliptique, C_1 est rationnelle et s'appuie en dix points sur C_2. Les deux courbes n'ont pas de bisécantes communes. C_1 est certainement gauche.

Lorsque C_2 est rationnelle et possède une seule quadrisécante a, la courbe C_1 doit s'appuyer en huit points sur C_2 et en deux points sur a. C_1 est certainement gauche, de plus cette courbe est rationnelle, car autrement C_1 et C_2 auraient un nombre négatif de bisécantes communes. Si C_1 est rationnelle, le nombre de ces bisécantes est égal à quatre. Donc :

d) C_2 est rationnelle ainsi que C_1, et cette courbe s'appuie huit fois sur C_2 et deux fois sur son unique quadrisécante ; de plus, les courbes ont quatre bisécantes communes.

Si C_2 admet une infinité de quadrisécantes (formant une quadrique), on n'obtient pas de congruence pour les raisons déjà invoquées dans le cas analogue au numéro 30.

Enfin, nous avons un cinquième cas :

e) C_2 a un point triple et C_1 s'appuie en huit points sur C_2.

Comme précédemment (n° 30), on peut démontrer que la courbe C_1 ne peut pas être plane.

L'hypothèse *a*) est à rejeter, car les courbes C_1, C_2 sont la base d'un faisceau de surfaces cubiques (*). On trouve alors $n_1 = 16$, $\nu_1 = 1$, $q_1 = 9$, $q_2 = 14$, ce qui est incompatible avec l'équation (2) du numéro 26.

Dans l'hypothèse *b*), par la courbe du quatrième ordre C_1, par C_2 et par les bisécantes communes aux deux courbes, il passe une surface cubique Π. Celles des coniques de la congruence situées sur cette surface sont en nombre simplement infini et y forment évidemment un faisceau. Les plans des coniques de ce faisceau passent par une droite *d* s'appuyant deux fois sur C_1, une fois sur C_2. Mais les bisécantes de C_1 s'appuyant sur une section plane C_3 de Π forment une surface d'ordre quinze passant cinq fois par C_1 et trois fois par C_3. Cette surface rencontre C_2 en dehors de C_1, de C_3 et des bisécantes communes à C_1, C_2, en douze points; donc il y a douze droites de la surface Π, bisécantes de C_1 et sécantes de C_2. Par suite, par un point quelconque de Π passent douze coniques de la congruence, et celle-ci n'est pas linéaire. L'hypothèse *b*) est donc à rejeter.

L'hypothèse *c*) est aussi à rejeter, car les courbes C_1, C_2 suivent la base d'un faisceau de surfaces cubiques qui comprennent toutes les coniques de la congruence. On trouve $n_1 = 15$, $\nu_1 = 1$, $q_1 = 10$, $q_2 = 9$, ce qui est incompatible avec l'équation (2) du numéro 26.

Dans l'hypothèse *d*), chacune des bisécantes communes à C_1, C_2 est triple pour chaque surface F, mais quintuple pour le lieu des bisécantes de C_2 s'appuyant sur elle; donc l'hypothèse doit être rejetée.

Enfin, dans l'hypothèse *e*), on a une surface cubique ayant un point double au point triple de C_2 et contenant les courbes C_1, C_2. Le même raisonnement qui a servi pour rejeter l'hypothèse *b*) permet de rejeter également l'hypothèse *e*).

On voit ainsi qu'il n'existe pas de congruence linéaire de coniques ayant une quintique quartisingulière et une quartique bisingulière.

(*) Stuyvaert, *Cinq études...* (Loc. cit., pp. 38 et suiv.)

§ 5. — *Congruences linéaires de coniques ayant un point principal.*

32. Nous avons exclu précédemment le cas où la congruence linéaire examinée possède un point principal (n° 20); nous allons maintenant reprendre cette hypothèse.

Soit Γ une congruence linéaire de coniques possédant un point principal O, c'est-à-dire que toutes les coniques de la congruence passent par O (*). En conservant les notations du § 2 (ch. III), on a $n_1 = 1$.

La surface **F**, lieu des coniques de la congruence Γ dont les plans passent par un point P, passe simplement par la droite PO, puisque la congruence est linéaire. Un plan passant par PO contient ν_1 coniques de la congruence, donc l'ordre de **F** est $2\nu_1 + 1$. D'autre part, **F** passe $\nu_1 + 1$ fois par O, car une droite partant de ce point ne rencontre plus la surface **F** qu'en ν_1 points.

La surface lieu des coniques de la congruence dont les plans passent par un point de l'espace, est d'ordre $2\nu_1 + 1$ *et passe* $\nu_1 + 1$ *fois par le point principal.*

Supposons que les coniques de la congruence Γ s'appuient m_1 fois sur une courbe C_2 d'ordre λ_2, ..., m_k fois sur une courbe C_k d'ordre λ_k, avec

$$m_1 + m_2 + \ldots + m^k = 4. \tag{1}$$

Les courbes C_1, C_2, ..., C_k appartiendront aux surfaces **F** avec les multiplicités respectives q_1, q_2, ..., q_k.

(*) Les congruences possédant deux points principaux ont été examinées plus haut (chap. III, § 2, congruences de la première catégorie).

Les droites qui forment des coniques dégénérées de la congruence Γ avec une infinité d'autres droites appartiennent à toutes les surfaces F. De pareilles droites sont nécessairement des droites issues de O et s'appuyant en deux points (en dehors de O) sur l'ensemble des courbes singulières. Si dans un plan mené par une de ces droites a se trouvent α droites formant avec a des coniques dégénérées de la congruence, la droite a est multiple d'ordre α sur chaque surface F. Nous supposerons qu'il existe p droites a_1, a_2, ..., a_p analogues à a et nous indiquerons par α_1, α_2, ..., α_p leurs multiplicités respectives pour les surfaces F. On posera

$$\sigma = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i^2. \tag{2}$$

Deux surfaces F ont en commun, outre les courbes C_1, C_2, ..., C_k et les droites $a_1, a_2, \ldots, a_p$, ν_1 coniques de la congruence, donc on a, pourvu qu'il n'y ait pas de droite singulière à coniques infiniment voisines (*),

$$(2\nu_1 + 1)^2 = 2\nu_1 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i q_i^2 + \sigma. \tag{3}$$

Les intersections d'une surface F et d'une conique de la congruence n'appartenant pas à cette surface ont lieu au point O ou sur les courbes singulières C_1, C_2, ..., C_k; donc

$$3\nu_1 + 1 = \sum_{i=1}^{k} m_i q_i. \tag{4}$$

Les équations (1), (2), (3) et (4) permettent d'étudier les congruences linéaires de coniques ayant un point principal. Nous déterminerons ici celles qui possèdent une courbe C d'ordre λ, quartisingulière ($m_1 = 4$).

(*) Voir Montesano, *Sui varii tipi*... (Loc. cit.)

33. Si la congruence Γ possède un point principal O et une courbe quartisingulière C, les équations (3), (4) deviennent

$$(2\nu_1 + 1)^2 = 2\nu_1 + \lambda q^2 + \sigma, \tag{5}$$

$$4q = 3\nu_1 + 1. \tag{6}$$

L'élimination de ν_1 entre ces deux équations donne

$$q^2(64 - 9\lambda) = 8q - 7 + 9\sigma.$$

On a $q \geq 1$, donc le second membre est positif et l'on doit avoir $9\lambda < 64$, c'est-à-dire $\lambda \leq 7$. On a évidemment $\lambda \geq 4$, donc :

Si une congruence linéaire de coniques possède un point principal et une courbe quartisingulière, celle-ci est d'ordre 4, 5, 6 ou 7.

Dans le cas où la courbe C est d'ordre 4, on a nécessairement $\nu_1 = 1$, d'où $q = 1$ et par suite $\sigma = 3$. On en conclut que l'on peut mener trois cordes de C pour un point extérieur et que C est donc une biquadratique de seconde espèce.

Si une congruence linéaire de coniques possède un point principal et une biquadratique gauche quartisingulière, celle-ci est de seconde espèce.

34. Considérons une congruence linéaire de coniques ayant un point principal O et une quintique C quartisingulière.

Si C passe par O, on a nécessairement $\nu_1 = 1$, d'où $q = 1$, $\sigma = 2$. Une droite *a* passant par O et s'appuyant encore deux fois sur C est évidemment simple sur les surfaces **F** ($\alpha = 1$); donc par un point de C passent deux trisécantes de cette courbe et elle est elliptique.

Si C ne passe pas par O et ne possède pas de point triple, une corde *a* de C, issue de O, est triple pour chaque surface **F**, de sorte que l'on a $\sigma = 6 . 9$, ou $x = 5 . 9$ ou enfin $\sigma = 4 . 9$. Alors les équations (5), (6) sont impossibles en nombres entiers.

Si C possède un point triple P et ne passe pas par O, une des trois cordes de cette courbe passant par O est triple pour chaque surface **F**, et la droite OP est double pour ces surfaces, donc $\sigma = 31$. Les équations (5), (6) donnent alors $q = 4$, $\nu_1 = 5$.

Si une congruence linéaire de coniques possède un point principal et une quintique quartisingulière, celle-ci est :

1° *elliptique, passe par* O *et la congruence est de classe un;*

2° *rationnelle, a un point triple et la congruence est de classe cinq.*

35. Considérons maintenant une congruence linéaire de coniques possédant un point principal O et une sextique C quartisingulière.

On a $\nu_1 \leq 15$. Les solutions en nombres entiers des équations (5), (6) satisfaisant à cette inégalité et telles que $\lambda = 6$, sont

a)	$\nu_1 = 1$,	$q = 1$,	$\sigma = 1$,
b)	$\nu_1 = 5$,	$q = 4$,	$\sigma = 15$,
c)	$\nu_1 = 9$,	$q = 7$,	$\sigma = 49$,
d)	$\nu_1 = 13$,	$q = 10$,	$\sigma = 103$.

Supposons que la courbe C passe t fois par O ($t \leq 2$). Les droites a, qui forment des coniques de la congruence, peuvent être de trois espèces. Si a est une bisécante de C issue de O, elle est multiple d'ordre $\frac{1}{2}(4 - t)(3 - t)$ pour chaque surface **F**; si c'est une droite joignant O à un point triple de C, elle est multiple d'indice $\frac{1}{2}(3 - t)(2 - t)$ pour les surfaces **F** ; enfin, si c'est une droite joignant O à un point quadruple de C, elle est multiple d'ordre $\frac{1}{2}(2 - t)(1 - t)$ pour les **F**. Soient respectivement k_1, k_2, k_3 les nombres de pareilles droites. On a

$$k_1(4-t)^2(3-t)^2 + k_2(3-t)^2(2-t)^2 + k_3(2-t)^2(1-t)^2 = 4\sigma. \quad (7)$$

La courbe C ne pouvant être rencontrée par un plan en plus de six points, on a l'inégalité

$$3k_2 + 4k_3 + t < 6. \quad (8)$$

D'autre part, le cône projetant C du point O est d'ordre $6 - t$ et possède k_1 droites doubles, k_2 droites triples et k_3 droites quadruples. Si $\pi \geq 0$ est le genre de C, on a

$$(5 - t)(4 - t) = 2\pi + 2k_1 + 6k_2 + 12k_3. \quad (9)$$

Dans l'hypothèse *a*), $\sigma = 1$ et on a $t = 2$, $k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = 0$, $\pi = 2$.

Dans l'hypothèse *b*), $\sigma = 15$; les solutions entières fournies par (7) ne satisfont jamais à (8) et (9). Cette hypothèse doit donc être rejetée. Des calculs analogues montrent qu'il en est de même des hypothèses *c*), *d*). Par suite :

Si une congruence linéaire de coniques possède un point principal et une sextique quartisingulière, celle-ci est de genre deux et passe deux fois par le point principal. La congruence est de classe un (*).

36. Examinons enfin le cas où la congruence linéaire possède un point principal O et une courbe quartisingulière du septième ordre C.

(*) Cette congruence n'est pas signalée par M. Montesano.

Les solutions en nombres entiers et positifs des équations

$$4\nu_1^2 + 2\nu_1 + 1 = 7q^2 + \sigma,$$
$$4q = 3\nu_1 + 1$$

sont

$$q = 3\varepsilon + 1, \qquad \nu_1 = 4\varepsilon + 1, \qquad \sigma = \varepsilon(\varepsilon - 2),$$

ε étant un entier positif. On a $\nu_1 \leq 21$, d'où $\varepsilon \leq 5$.

Soient t la multiplicité de O pour C, π le genre de C, k_1 le nombre de droites issues de O s'appuyant encore deux fois sur C, k_2, k_3, k_4 respectivement les nombres des points triples, quadruples et quintuples de C en dehors de O. On doit avoir :

$$k_1(5-t)^2(4-t)^2 + k_2(4-t)^2(3-t)^2 + k_3(3-t)^2(2-t)^2 + k_4(2-t)^2(1-t)^2 = 4\varepsilon(\varepsilon-2),$$
$$3k_2 + 4k_3 + 5k_4 \leqq 7, \qquad 4k_3 + 5k_4 + t \leqq 7,$$
$$(6-t)(5-t) = 2\pi + 2k_1 + 6k_2 + 12k_3 + 20k_4.$$

Les solutions entières et positives de ces équations donnant $\varepsilon \leq 5$ sont :

a) $k_1=k_2=k_3=k_4=0,\ t=3,\ \pi=3,\ \varepsilon=0,\ \sigma=0,\ \nu_1=1,\ q=1,$
b) $k_1=k_2=k_3=k_4=0,\ t=2,\ \pi=6,\ \varepsilon=2,\ \sigma=0,\ \nu_1=9,\ q=7.$

Dans chacun de ces cas, la surface des trisécantes de la courbe C existe effectivement, et cette surface passe quatre fois dans le cas *a*), trois fois dans le cas *b*) par le point principal O, ce qui est incompatible avec $\sigma = 0$. Donc :

Si une congruence linéaire de coniques admet un point principal et une courbe quartisingulière, celle-ci est :

1° *Une quartique gauche de seconde espèce ;*

2° *Une quintique elliptique passant par le point principal ;*

3° *Une quintique rationnelle dotée d'un point triple ;*

4° *Une sextique de genre deux passant doublement par le point principal.*

THÈSES ANNEXÉES.

I. L'énumération des congruences linéaires de courbes gauches d'ordre quelconque n peut se faire par la considération des surfaces engendrées par les courbes de cette congruence s'appuyant sur les droites de l'espace, et par le calcul de certains nombres finis de courbes d'ordres inférieurs à n.

II. La considération du lieu des points de rebroussement de Segre des courbes d'un système linéaire quadruplement infini, situé sur une surface algébrique, peut donner deux invariants arithmétiques relatifs de la surface.

III. La considération des matrices dont les éléments sont des formes à deux séries de variables peut donner des résultats intéressants dans la théorie des coïncidences (couples de connexes).

IV. L'énumération des congruences linéaires de coniques s'appuyant sur les arêtes d'un trièdre peut être facilitée par la considération des surfaces de Steiner et des cônes du second ordre passant respectivement deux fois et une fois par les arêtes du trièdre considéré.

V. Le concept d'isomorphisme holoédrique de deux groupes continus et finis, s'établit en rapportant projectivement les transformations infinitésimales d'un groupe à celles de l'autre. La considération de deux groupes continus et finis dont les transformations infinitésimales sont en correspondance crémonienne peut aussi fournir des résultats intéressants.

Addition au chapitre premier.

Ce travail était terminé lorsque j'ai eu connaissance d'un Mémoire de M. Scherrer (*), dans lequel cet auteur représente une conique de l'espace par l'équation

$$\sum_{i=1}^{4} \sum_{k=1}^{4} a_{ik} u_i u_k = 0,$$

sous la condition

$$|a_{ik}| = 0, \qquad (i_1 k = 1, 2, 3, 4)$$

les (u) étant les coordonnées tangentielles de l'espace. La géométrie de la conique dans l'espace revient alors à la géométrie sur une hypersurface du quatrième ordre d'un espace linéaire à neuf dimensions.

Liége, 20 juin 1911.

(*) Otto Scherrer, *Ueber Kegelschnitte im Raum*. Programm. Frauenfeld, 1900.

TABLE DES MATIÈRES.