Bulletin de la Classe des sciences

Diviseur de Severi des surfaces des couples de points de certaines courbes algébriques

Lucien Godeaux

Résumé
On démontre que la surface des couples de points non ordonnés d'une courbe algébrique image d'une involution d'ordre premier impair p, privée de points unis, appartenant à une courbe algébrique, a le diviseur de Severi égal à *p*.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Diviseur de Severi des surfaces des couples de points de certaines courbes algébriques,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On démontre que la surface des couples de points non ordonnés d'une courbe algébrique image d'une involution d'ordre premier impair p, privée de points unis, appartenant à une courbe algébrique, a le diviseur de Severi égal à p.

Dans une note récente, nous avons démontré que la surface des couples de points non ordonnés d'une courbe algébrique image d'une involution du second ordre privée de points unis appartenant à une courbe algébrique a le diviseur de Severi égal à deux (1). Cette proposition s'étend, comme nous allons le montrer, au cas où l'involution du second ordre est remplacée par une involution d'ordre premier impair p, cyclique.

Nous considérons une courbe algébrique L contenant une involution cyclique d'ordre premier p, privée de points unis, et la courbe algébrique L' qui représente cette involution. Soient F, F' les surfaces images des couples de points non ordonnés respectivement des courbes L, L'. La surface F contient deux involutions : l'une I, cyclique, d'ordre p ayant comme image une surface F'', l'autre J, d'ordre p^2, composée au moyen de I, ayant pour image la surface F'. A cette involution J correspond, sur la surface F'', une involution I' d'ordre p (non cyclique). Si $p = 2$, l'involution I possède une courbe unie et l'involution I'

(1) *Surface des couples de points d'une courbe algébrique dont le diviseur de Severi est égal à deux* (Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1962, pp. 550-555)

est privée de points unis. Au contraire, si $p > 2$, l'involution I est privée de points unis et l'involution I' possède une courbe unie (1). Le raisonnement qui a permis d'établir le théorème en question est au fond le même quel que soit p, mais si $p > 2$ la surface F^* a également le diviseur de Severi égal à p. Il importe de montrer le passage de F^* à F' dans le deuxième cas ; c'est ce que nous faisons à la fin de cette note.

1. Soient L une courbe algébrique de genre π' contenant une involution cyclique γ_p d'ordre premier impair p, privée de points unis, L' une courbe de genre π image de cette involution. Nous supposerons que ces courbes ne sont pas hyperelliptiques. Entre les genres π et π', nous avons la relation

$$p(\pi - 1) = \pi' - 1.$$

Désignons par F la surface des couples de points non ordonnés de la courbe L et par F' la surface des couples de points non ordonnés de la courbe L'. La surface F contient une involution J d'ordre p^2 dont F' est l'image et une involution cyclique I d'ordre p, dont nous désignerons une image par F^*.

Les points d'un groupe de l'involution J représentent les couples de points de L pris l'un dans un groupe de γ_p, l'autre dans un groupe de γ_p distinct ou non du précédent. A un point P de F, image d'un couple P_1P_2 de L, faisons correspondre le point P' qui représente les points P'_1, P'_2 que la transformation birationnelle τ de L en soi fait correspondre à P_1, P_2. Le point P' correspond à P dans une transformation birationnelle T de F en soi, de période p, génératrice de l'involution I. L'involution J est composée au moyen de l'involution I et il lui correspond sur F^* une involution I' d'ordre p(non cyclique) dont F' est une image.

L'involution I est, comme γ_p, privée de points unis.

Nous désignerons comme d'habitude par H les courbes de F, de genre π', représentant les couples de points de L dont l'un est fixe et par K l'enveloppe du système $\{H\}$, d'indice deux et de

(1) *Sulla costruzione di certe superficie algebriche irregolari* (Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei ; 1° sem. 1949, pp. 694-496). *Costruzione di superficie algebriche irregolari* (Atti del Convegno internazionale di Geometria algebrica, Torino, maggio 1961).

degré un, engendré par les courbes H. La courbe K représente les couples de points de L formés de deux points coïncidents. Nous désignerons par H′ et K′ les courbes analogues de la surface F′.

Rappelons que les genres des surfaces F, F′, F⁻ sont respectivement

$$p_g = \frac{1}{2}\,p(\pi-1)[p(\pi-1)+1],\ p_a = \frac{1}{2}[p(\pi-1)+1][p(\pi-1)-2],$$

$$p^{(1)} = p(\pi-1)[4p(\pi-1)-5]+1,$$

$$p'_g = \frac{1}{2}\pi(\pi-1),\ p'_a = \frac{1}{2}\pi(\pi-1)-\pi,\ p'^{(1)} = (\pi-1)(4\pi-5)+1,$$

$$p_g^+ = \frac{1}{2}(\pi-1)[p(\pi-1)+1],\quad p_a^- = \frac{1}{2}(\pi-1)[p(\pi-1)-1],$$

$$p^{-(1)} = (\pi-1)[4p(\pi-1)-5]+1.$$

Les surfaces F′, F⁻ ont la même irrégularité π.

Nous désignons par K_o la courbe qui représente sur F les couples de points des groupes de γ_p. La courbe K_o est unie pour l'in-l'involution J. A un groupe de γ_p correspond sur K_o un groupe de $\frac{1}{2}p(p-1)$ points doubles pour J. A la courbe K_o correspond sur F⁻ une courbe K_0^- qui est la courbe unie de l'involution I′. A l'ensemble des courbes K^+, K_0^- correspond sur F′ la courbe K′.

2. Commençons par établir une lemme d'ailleurs fort simple.

Considérons sur L′ une série linéaire $|A'_1|$ d'ordre n, non spéciale et par conséquent de dimension $r = n - \pi$. A cette série correspond sur L une série $|A_1|$, d'ordre np, non spéciale qui, complétée, a la dimension

$$pn - \pi' = p(n-\pi) + p - 1.$$

Dans la série $|A|$, la transformation birationnelle τ de L en soi génératrice de γ_i, agit comme une homographie et il y a donc, dans cette série, t séries linéaires partielles $|A_1|$, $|A_2|$, ..., $|A_t|$ appartenant à l'involution γ_p, la première étant la transformée de $|A'_1|$. Désignons par $|A'_2|$, $|A'_3|$, ..., $|A'_t|$ les séries linéaires qui correspondent sur L′ respectivement aux séries $|A_2|$, $|A_3|$,

..., $|A_t|$. Ce sont des séries d'ordre n, non spéciales, donc de dimension $r = n - \pi$. D'après la thérorie des homographies, on doit avoir

$$t(n - \pi) + t = p(n - \pi) + p,$$

d'où $t = p$. Il existe donc p séries $|A'_1|$, $|A'_2|$, ..., $|A'_p|$ sur L', dont les transformées sur L appartiennent à une même série linéaire.

A un groupe quelconque de $|A|$ correspond sur L' un groupe A' de pn points. Faisons varier ce groupe A d'une manière continue dans $|A|$ de manière qu'il tende vers un groupe de $|A_1|$. Alors, le groupe A' varie d'une manière continue sur L' et tend vers un groupe de $|A'_1|$ compté p fois. Puisque $|A|$ est rationnelle, les groupes A' appartiennent à une série linéaire et on a

$$A' \equiv p\, A'_1.$$

On a de même, $A' \equiv pA'_2$, ..., $A' \equiv pA'_p$ et par suite

$$|A'| = |pA'_1| = |pA'_2| = \ldots = |pA'_p|.$$

3. Considérons un groupe de $|A'_1|$ et soient H'_{11}, H'_{12}, ..., H'_{1n} les courbes H' qui correspondent aux points de ce groupe. Severi a démontré [1] que la courbe

$$G'_1 = H'_{11} + H'_{12} + \ldots + H'_{1n}$$

appartient à un système linéaire $|G'_1|$, régulier, de dimension $\frac{1}{2}r(r + 3)$.

De même, si l'on désigne par H'_{i1}, H'_{i2}, ..., H'_{in} ($i = 2, 3, \ldots, p$) les courbes H' d'un groupe de la série $|A'_i|$, la courbe

$$G'_i = H'_{i1} + H'_{i2} + \ldots + H'_{in}$$

appartient à un système linéaire régulier de dimension $\frac{1}{2}r(r + 3)$.

Soient maintenant H'_1, H'_2, ..., H'_{pn} les courbes H' qui correspondent aux points d'un groupe de la série $|A|$. La courbe

(1) SEVERI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* (Memorie della Accademia di Torino, 1903).

$$G' = H'_1 + H'_2 + \dots + H'_{pn}$$

appartient à un système linéaire régulier $|G'|$ de dimension égale à $\frac{1}{2}(pn - \pi)(pn - \pi + 3)$, la série $|A'|$ ayant la dimension $pn - \pi$.

Parmi les groupes $H'_1, H'_2, \dots, H'_{pn}$ se trouvent les groupes $pH'_{i1}, pH'_{i2}, \dots, pH'_{in}$ et par conséquent le système $|G'|$ contient les courbes pG'_i. D'une manière précise, on a

$$|G'| = |pG'_1| = |pG'_2| = \dots = |pG'_n|$$

En ajoutant à une courbe quelconque de F′ successivement les courbes virtuelles

$$G'_1 - G'_1,\ G'_1 - G'_2,\ \dots,\ G'_1 - G'_p,$$

on obtient p systèmes linéaires dont les multiples d'ordre p sont équivalents. Par conséquent, *le diviseur de Severi de la surface* F′ *est égal à p.*

4. La surface F′ étant l'image d'une involution cyclique d'ordre p privée de points unis, son diviseur de Severi est égal à p [1]. Aux p systèmes linéaires de F′ équisousmultiples d'un système linéaire doivent correspondre p systèmes linéaires de F′ équisousmultiples d'un système linéaire.

Soient $P_1, P_2, \dots, P_p$ les p points d'un groupe de γ_p et $H_1, H_2, \dots, H_p$ les courbes H qui leur correspondent sur F. Si P est un point de L, P′ le point que τ lui fait correspondre, au couple PP_1 correspond un point de H_1 et au couple $P'P$, un point de H_2, par conséquent T fait correspondre H_2 à H_1 et de même, H_3 à H_2, …, H_1 à H_p. La courbe

$$G_0 = H_1 + H_2 + \dots + H_p$$

appartient donc à l'involution I (mais les courbes G_0 n'appartiennent pas à un même système linéaire).

A un groupe de la série linéaire $|A|$ correspond sur F un

[1] *Sur certaines surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité* (Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, 1914, pp. 362-368). Voir aussi notre exposé : *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.* Actualités scientifiques, N° 270 (Paris, Hermann, 1935).

groupe de pn courbes H dont la somme appartient à un système linéaire de courbes $|G| = |nG_0|$ régulier, de dimension égale à $\frac{1}{2}(pn - \pi')(pn - \pi' + 3)$.

Aux points d'un groupe de la série partielle $|A_1|$ correspondent np courbes H dont la somme appartient à un système linéaire $|G_1|$ compris dans $|G|$ et qui appartient à l'involution I. De même, aux séries linéaires partielles $|A_2|$, $|A_3|$, ..., $|A_p|$ correspondent sur F des systèmes linéaires $|G_2|$, $|G_3|$, ..., $|G_p|$ appartenant à l'involution I. A ces différents systèmes correspondent sur F^+ des systèmes linéaires G_1^+, G_2^+, ..., G_p^+ tels que

$$pG_1^+ \equiv pG_2^+ \equiv \dots \equiv pG_n^+.$$

Aux systèmes $|G'_1|$, $|G'_2|$, ..., $|G'_n|$ de F' correspondent sur F^+ les systèmes $|G_1^+|$, $|G_2^+|$, ..., $|G_p^+|$.

5. Les courbes G sont de genre

$$pn\pi' + \frac{1}{2}(pn - 1)(pn - 2)$$

et de degré p^2n^2.

Si l'on fixe l'attention sur une courbe G_1, on voit que le système $|G_1|$ a le degré pn^2 et le genre

$$\pi^+ = n\pi' + \frac{1}{2}n(pn - 3) + 1,$$

d'après la formule de Zeuthen.

Les systèmes $|G_2^+|$, $|G_3^+|$, ..., $|G_p^+|$ ont évidemment les mêmes caractères.

Le système $|G'_1|$ a le degré n^2 et le genre

$$n\pi + \frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$$

Observons que les courbes G'_1 rencontrent la courbe K' en $2n$ points. A un de ces points correspond sur F^+ un point de K^+ et $\frac{1}{2}(p - 1)$ points de K_0^+ qui sont doubles pour l'involution I'.

Nous devons donc avoir, en appliquant la formule de Zeuthen à la correspondance $(1, p)$ existant entre une courbe G'_1 et la courbe G_1^+ homologue,

$$2p(\pi - 1) + n(p - 1) = 2[n\pi' + \frac{1}{2}n(pn - 3)],$$

ce qui est une identité.

Liège, le 7 mai 1962.