Bulletin de la Classe des sciences

Construction de la surface bicanonique possédant une seule courbe canonique de genre trois

Lucien Godeaux

Résumé
Construction de la surface du huitième ordre dont les sections planes sont les courbes bicanoniques, possédant une seule courbe canonique de genre trois et dont les genres sont $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 3$, $P_2 = 4$, $P_3 = 8$, $P_4 = 14$,...

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Construction de la surface bicanonique possédant une seule courbe canonique de genre trois

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction de la surface du huitième ordre dont les sections planes sont les courbes bicanoniques, possédant une seule courbe canonique de genre trois et dont les genres sont $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 3$, $P_2 = 4$, $P_3 = 8$, $P_4 = 14, \ldots$

Certaines de nos recherches nous ont conduit à l'étude des surfaces algébriques possédant une seule courbe canonique ($p_a = p_g = 1$). Nous indiquons ici la construction de celle de ces surfaces dont le genre linéaire est égal à trois ($p^{(1)} = 3$). Nous établissons précisément que : *On peut prendre comme modèle projectif de la surface de genres* $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 3$, $p_2 = 4$ *une surface du huitième ordre construite de la manière suivante : On considère la surface du septième ordre* $\varphi_7 = 0$ *à sections elliptiques ; elle possède une courbe double D d'ordre quatorze et de genre trois ayant dix points triples, triples également pour la surface, située sur une surface du quatrième ordre* $\varphi_4 = 0$. *La surface cherchée a pour équation* $x_4\varphi_7 + \varphi_4^2 = 0$.

1. Soit F une surface algébrique régulière possédant une seule courbe canonique C_1 de genre trois, irréductible. Cette surface a donc les genres $p_a = p_g = 1, p^{(1)} = 3$, et par conséquent le bigenre $P_2 = 4$. Nous supposerons que le système bicanonique $|C_2| = |2C_1|$ est simple et en rapportant projectivement les courbes C_2 aux

plans de l'espace, nous obtiendrons pour F une surface d'ordre $4(p^{(1)} - 1) = 8$, dont les sections planes ont le genre $3p^{(1)} - 2 = 7$.

Sur cette surface F, la courbe canonique C_1 est une quartique plane de genre trois ; nous désignerons son plan par α. La surface F touche le plan α le long de la courbe C_1.

La surface F possède une seule adjointe du quatrième ordre qui doit découper sur le plan α la courbe canonique C_1. Soient $x_4 = 0$ l'équation du plan α et $\varphi_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ celle de l'adjointe. L'équation de la surface F est de la forme

$$x_4\, \varphi_7(x_1, x_2, x_3, x_4) + \varphi_4^2\, (x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

où φ_7 est un polynome du septième ordre.

La surface $\varphi_4 = 0$ ne peut rencontrer la surface $\varphi_7 = 0$ en dehors de la courbe double de la surface. L'intersection de ces deux surfaces est donc une courbe D du quatorzième ordre, double pour $\varphi_7 = 0$, simple pour $\varphi_4 = 0$ et par suite double pour la surface F.

Les biadjointes à la surface F sont des surfaces du huitième ordre, distinctes de la surface F, passant doublement par la courbe D. Observons que les sections planes de la surface F ont quatorze points doubles et comme elles sont de genre sept, la surface F ne peut posséder une courbe double distincte de D. D'autre part, la surface F ne rencontre pas la surface φ_7 en dehors de la courbe D. Soit r la dimension du système des surfaces du huitième ordre passant deux fois par D. Celles de ces surfaces qui passent par un point de φ_7 non situé sur D contiennent cette surface comme partie. Ces surfaces ont donc une équation de la forme

$$\varphi_7(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4) = 0$$

On a donc $r = 4$ et comme on doit défalquer la surface F, on trouve que le système bicanonique $|C_2|$ de F est bien celui des sections planes ($P_2 = 4$).

Observons qu'en utilisant l'équation de la surface F, la courbe découpée par la biadjointe $x_4\varphi_7 = 0$ coïncide avec la courbe découpée par la biadjointe $\varphi_4^2 = 0$.

La construction de la surface F revient donc à celle de la surface $\varphi_7 = 0$.

2. La surface $\varphi_7 = 0$, d'ordre sept, possédant une courbe double D d'ordre 14, ses sections planes sont elliptiques. La surface ne peut être réglée, car elle serait le lieu de pentasécantes de la courbe D et les génératrices de cette réglée appartiendraient à la surface F, ce qui est absurde. La surface φ_7 est donc rationnelle et représentable point par point sur un plan σ de telle sorte qu'à ses sections planes correspondent des cubiques γ_3 passant par deux points A_1, A_2 et formant un système linéaire (incomplet) de dimension trois, Σ.

La construction de la surface $\varphi_7 = 0$ est une question classique et nous la résumerons rapidement.

Désignons par γ_6 les jacobiennes des réseaux $|\gamma_3|$ du système Σ. Elles forment un système linéaire ∞^3 et passent deux fois par les points A_1, A_2. Elles représentent les sections de la surface φ_7 par les premières polaires de cette surface en dehors de la courbe double D.

Considérons deux réseaux $|\gamma_3|$, $|\gamma_3'|$ de Σ et soient γ_6, γ_6' leurs jacobiennes.

Les réseaux $|\gamma_3|$, $|\gamma_3'|$ ont en commun un faisceau contenant douze courbes ayant un point double. Ces douze points sont communs à γ_6, γ_6'. Si B est un autre point commun à γ_6, γ_6', les courbes des réseaux $|\gamma_3|$, $|\gamma_3'|$ passant par B y ont même tangente. Il existe par conséquent seize points B par chacun desquels passent ∞^2 courbes γ_3 de Σ ayant une tangente commune. Ces points sont des points-base du système $|\gamma_6|$. A un point B correspond sur φ_7 un point B' double pour la surface.

Les premières polaires de la surface φ_7 sont du sixième ordre et à l'intersection de l'une d'elles avec la surface correspond dans σ une courbe passant six fois par les points A_1, A_2. Si l'on défalque de cette courbe celle qui correspond à l'intersection de φ_7 avec la polaire en dehors de D, c'est-à-dire une courbe γ_6, on obtient une courbe Δ, d'ordre douze, passant quatre fois par les points A_1, A_2, qui correspond à D. A un point de D correspondent deux points de Δ par lesquels passent ∞^2 courbes γ_3 de Σ. La courbe Δ passe par les points B.

Supposons qu'il existe trois points P_1, P_2, P_3 du plan σ qui soient, avec A_1, A_2, les points base d'un réseau de courbes γ_3 de Σ. A ces trois points correspond sur φ_7 un point P' triple pour la surface et pour la courbe D. La seconde polaire d'un point O par rapport à φ_7 passe par P' et par les points de D où un des plans tangents à la surface passe par O. Le nombre de ces derniers points est égal au nombre des intersections de la courbe Δ et d'une courbe γ_6 en dehors des points A_1, A_2 et des seize points B, c'est-à-dire à 40. Si x est le nombre des points triples de D, on a donc

$$3\,x + 40 = 5.14,$$

d'où $x = 10$. La courbe D possède donc dix points triples, triples également pour la surface.

Les points P_1, P_2, P_3 sont doubles pour la courbe Δ, car chacun d'eux appartient à deux couples de points par lesquels passent ∞^2 courbes γ_3 de Σ. La courbe Δ possède donc 30 points doubles et deux points quadruples A_1, A_2, elle est donc de genre 13.

Entre la courbe D et la courbe Δ, nous avons une correspondance (1,2) et l'involution ainsi déterminée sur Δ possède comme points doubles les seize points B. D'après la formule de Zeuthen, la courbe D est donc de genre trois.

Les surfaces du quatrième ordre sont en nombre ∞^{34} ; celles qui passent par les dix points triples de D sont en nombre ∞^r, où $r \geqslant 24$. Elles découpent sur D, en dehors de ces points, une série linéaire d'ordre 26, donc non spéciale, de dimension 23. Il y a donc ∞^{r-24} surfaces du quatrième ordre contenant la courbe D. Une de ces surfaces ne rencontre pas la surface φ_7 en dehors de D et par suite on a $r = 24$.

Nous avons construit une surface du septième ordre φ_7 possédant une courbe double D d'ordre 14 et de genre trois, ayant 10 points triples, triples également pour la surface. La courbe D est située sur une surface du quatrième ordre.

3. Désignons par $\varphi_4 = 0$ l'équation de la surface du quatrième ordre contenant D. Reprenons la surface

$$x_4\,\varphi_7 + \varphi_4^2 = 0$$

Le raisonnement fait plus haut (n. 1) montre que cette surface, qui est irréductible, a les genres

$$p_a = p_g = 1, \quad p^{(1)} = 3, \quad P_2 = 4,$$

la courbe canonique ayant pour équations

$$x_4 = 0, \quad \varphi_4 = 0$$

et les courbes bicanoniques étant les sections planes de la surface. Nous avons donc résolu le problème posé.

4. Il est intéressant de déterminer les systèmes tricanoniques et tétracanoniques de la surface F.

Les surfaces triadjointes à la surface F sont des surfaces d'ordre douze passant trois fois par la courbe D et ne contenant pas comme partie la surface F. Désignons par r la dimension du système des surfaces d'ordre douze passant trois fois par D. Parmi ces surfaces on trouve

$$\varphi_4(x_4\varphi_7 + \varphi_4^2) = 0$$

comprenant F comme partie et par conséquent le trigenre P_3 de F est $P_3 \leqslant r$.

Les surfaces d'ordre douze passant trois fois par D ne rencontrent plus la surface φ_7 en dehors de D, donc il y a ∞^{r-1} de ces surfaces qui contiennent φ_7 comme partie et qui sont complétées par des surfaces du cinquième ordre passant simplement par la courbe D.

Les surfaces du cinquième ordre passant par les dix points triples de la courbe D en nombre ∞^{45} et découpent sur D une série linéaire d'ordre 40 et de dimension 37. Il y a par conséquent $\infty^{45-38} = \infty^7$ surfaces du cinquième ordre contenant D.

Le trigenre de F est $P_3 = 8$ et par conséquent on a $r = 8$.

Les courbes tricanoniques de F sont découpées par les ∞^7 surfaces du cinquième ordre passant par la courbe double de F.

Observons que parmi ces surfaces se trouvent celles d'équation

$$\varphi_4(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4) = 0,$$

qui découpent sur F les courbes $C_1 + C_2$. Nous désignerons par $\psi_5 = 0$ les surfaces du cinquième ordre, en nombre ∞^3, qui, avec les surfaces précédentes, découpent sur F les courbes tricanoniques.

5. Déterminons maintenant le système tétracanonique.

Les surfaces tétraadjointes à F sont les surfaces d'ordre 16 passant quatre fois par la courbe D et ne contenant pas F comme partie. Elles ne rencontrent plus la surface φ_7 en dehors de D et par conséquent elles contiennent φ_7 comme partie. Elles sont complétées par des surfaces du neuvième ordre passant deux fois par D.

Le système tétracanonique $|C_4|$ de F contient les courbes $2C_2$ et parmi les surfaces du neuvième ordre précédentes se trouvent les surfaces

$$\varphi_7\psi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

où ψ_2 est une forme quadratique à cœfficients variables.

Le système $|C_4|$ contenant les courbes $C_1 + C_3$, parmi les surfaces du neuvième ordre se trouvent les surfaces

$$\varphi_4{}^2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4) = 0.$$

Or, en utilisant l'équation de F, on a

$$\varphi_4^2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4) \equiv x_4\psi_7(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4).$$

On en conclut que *les courbes tétracanoniques de* F *sont découpées sur cette surface par les surfaces du neuvième ordre*

$$\varphi_7\psi_2 + \varphi_4\psi_5 = 0$$

et on a bien $P_4 = 14$.

Liège, le 13 juin 1962.