EXTRAIT DU BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE CRACOVIE
CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES. SÉRIE *A*: SCIENCES MATHÉMATIQUES
OCTOBRE 1912

SUR LES CONGRUENCES LINÉAIRES DE COURBES PLANES

PAR

L. GODEAUX

CRACOVIE
IMPRIMERIE DE L'UNIVERSITÉ
1912

O liniowych kongruencyach krzywych płaskich. — Sur les congruences linéaires de courbes planes.

Mémoire

de M. **LUCIEN GODEAUX,**

présenté, dans la séance du 14 Octobre 1912, par M. K. Żorawski m. c.

Dans un Mémoire qui sera publié prochainement par le Cercle Mathématique de Palerme [1]), j'ai entrepris l'étude des congruences linéaires de courbes planes d'ordre m et de genre $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ (c'est-à-dire sans points multiples) et, par une méthode nouvelle, j'ai déterminé les différents types de congruences linéaires possédant une seule courbe singulière. Précisément, je suis arrivé au théorème suivant:

Les congruences linéaires de courbes planes d'ordre $m\,(>1)$ et de genre $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, dotées d'une seule courbe singulière, sont formées par des courbes s'appuyant en $m\,(m+1)$ points sur:

1) une courbe d'ordre m^2+m+1, base d'un réseau de surfaces d'ordre $m+1$, deux de ces surfaces ayant encore en commun une courbe de la congruence; ou sur:

2) une courbe d'ordre m^2+m possédant une droite sécante la rencontrant en $m\,(t+1)$ points $(0<t<m)$ et formant avec cette droite la base d'un réseau de surfaces d'ordre $m+1$ dont deux éléments ont encore en commun une courbe de la congruence; ou sur:

3) une courbe d'ordre huit et de genre trois, dotée de deux points triples $(m=2)$; ou sur:

4) une courbe rationnelle d'ordre sept, dotée de

[1]) *Sulle congruenze lineari di curve piane dotate di una sola curva singolare.* Rend. del Circolo matematico di Palermo, 1912.

deux points triples et possédant une quadrisécante ($m = 2$).

Dans ce nouveau travail, je me propose de montrer comment on peut appliquer ma méthode à la détermination des congruences linéaires de courbes planes d'ordre m et de genre $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, dotées de plusieurs courbes singulières, aucune de ces courbes n'étant une droite. Mais cette détermination effective serait longue et fastidieuse; je me contenterai par suite dans ce travail de déterminer, à titre d'exemple, les types de congruences linéaires dotées de deux courbes singulières dont l'une, C_1, est rencontrée en m^2 points par les courbes de la congruence, et l'autre, une courbe plane C_2, d'ordre m, est rencontrée en m points par ces courbes. Je rencontrerai ainsi quatre congruences dont les deux premières sont respectivement des cas particuliers des deux premières congruences rencontrées dans mon premier Mémoire. D'une façon précise, j'établis ce théorème:

Si une congruence linéaire est le lieu des courbes planes d'ordre $m\,(> 1)$ et de genre $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ s'appuyant en m points sur une courbe plane, C_2, d'ordre m, et en m^2 points sur une autre courbe C_1, celle-ci est:

1) une courbe gauche d'ordre m^2+1 s'appuyant en m^2 points sur la courbe C_2, et la congruence est de classe un; ou bien est:

2) une courbe gauche d'ordre m^2 s'appuyant en m^2 points sur la courbe C_2; la congruence est de classe un et possède une droite exceptionnelle s'appuyant en $m(t+1)$ points sur C_1 $(0 < t < m)$; ou bien est:

3) une courbe gauche d'ordre m^2+m rencontrant C_2 en m^2+m points; la congruence est de classe $m+1$ et possède une droite exceptionnelle s'appuyant en m^2 points sur C_1; ou bien est:

4) une courbe gauche d'ordre m^2+m-1 rencontrant C_2 en m^2+m-1 points; la congruence est de classe $m+1$ et possède deux droites exceptionnelles, l'une s'appuyant en m^2 points sur C_1, l'autre en $2m-1$ points sur C_1 et en un seul point sur la courbe C_2 [1]).

[1]) Pour $m = 2$ voir Pieri, *Sopra alcune congruenze di coniche* [Atti della R. Accad. di Torino, 1893, XXVIII] et Montesano, *Sui varii tipi di congru-*

La méthode est fondée sur la considération d'une certaine surface que j'appelle brièvement surface F, lieu des courbes de la congruence dont les plans passent par un point de l'espace. Je ne ferai que rappeler rapidement les propriétés de cette surface (et du système linéaire ∞^3 qu'elle engendre), ces propriétés ayant déjà été établies dans mon premier Mémoire.

1. Soit Σ une congruence linéaire, irréductible, de courbes planes Γ d'ordre m $(m > 1)$ et de genre $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, c'est-à-dire un système algébrique, doublement infini, de courbes planes Γ, tel que par un point de l'espace passe généralement une et une seule courbe Γ. La congruence Σ pourra être représentée par le système d'équations algébriques:

$$f(x, y, z; a, b) = 0 \tag{1}$$

$$\varphi(x, y, z; a, b) = 0, \tag{2}$$

la première d'ordre m, la seconde linéaire en x, y, z (coordonnées cartésiennes ponctuelles de l'espace); a et b étant deux paramètres effectifs.

Les équations (1) et (2), où l'on considère a, b comme les coordonnées cartésiennes du plan, et x, y, z comme des paramètres, représentent respectivement des systèmes triplement infinis (dont le second seul est linéaire). La congruence Σ étant linéaire, on peut supposer, par le théorème de M. Castelnuovo sur les involutions planes [1]), les a, b choisis de telle manière qu'une courbe du premier système ne rencontre une courbe du second qu'en un point variable.

Les $m(m+1)$ points focaux de la congruence Σ situés sur une courbe Γ sont donnés par l'équation [2]):

$$\frac{\partial f}{\partial a}\frac{\partial \varphi}{\partial b} - \frac{\partial f}{\partial b}\frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0, \tag{3}$$

jointes aux équations (1) et (2). On en conclut que, dans le cas

enze lineari di coniche dello spazio [Rendiconti della R. Accad. di Napoli, 1895]. Les méthodes employées par ces Géomètres diffèrent de la nôtre et ne sont d'ailleurs pas susceptibles d'une extension au cas $m > 2$.

[1]) *Sulla razionalità delle involuzione piane* [Math. Annalen, 1893, Bd. XLIV].

[2]) Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces* [Paris, Gauthier-Villars, 1889, Vol. II, Ch. I, pp. 3, 4].

actuel, par un point focal passe une infinité de courbes de la congruence. En effet, la relation (3) exprime la condition pour que deux courbes (1), (2) du plan des (a, b), appartenant respectivement aux deux systèmes ∞^3, se touchent. Or, ces deux courbes n'ont qu'un point variable en commun, donc elles ont nécessairement une partie commune.

Nous dirons, suivant l'usage, qu'un point de l'espace commun à ∞^1 courbes de Σ est un point singulier, si ces courbes ne sont pas toutes dégénérées [1]). Nous supposerons que les $m\,(m+1)$ points focaux (qui sont évidemment ici des points singuliers) situés sur une courbe Γ de Σ, sont généralement distincts.

Dans une congruence linéaire, nous avons évidemment une infinité de points singuliers dont le lieu se compose de quelques courbes $C_1, C_2, \ldots C_k$, dites courbes singulières, sur lesquelles les courbes Γ s'appuient complessivement en $m\,(m+1)$ points.

D'après notre supposition, ces $m\,(m+1)$ points d'appui sont généralement distincts. Cela équivaut à supposer, d'après un théorème de M. Darboux [2]), que les courbes Γ passant par un point d'une courbe singulière ne touchent pas, en ce point, un plan tangent à cette courbe en ce même point.

Nous supposerons encore qu'aucune des courbes singulières n'est une droite. (On verra pour quelle raison au paragraphe suivant).

2. Désignons par n la classe de la congruence, c'est-à-dire supposons qu'il y a en général n courbes de Σ dont les plans passent par une droite quelconque.

Les courbes Γ de Σ dont les plans passent par un point P quelconque, forment une surface F d'ordre $nm+1$, passant simplement par P. Si l'on désigne par q_i la classe du cône enveloppé par les plans des courbes Γ passant par un point de la courbe singulière C_i, celle-ci sera multiple d'ordre q_i pour $F\,(i=1, 2, \ldots, k)$.

Considérons deux surfaces F, F_1 relatives à deux points P, P_1 choisis arbitrairement. Ces deux surfaces auront en commun les n courbes Γ dont les plans passent par P et P_1, les courbes singu-

[1]) S'il en était autrement, on aurait affaire à un point exceptionnel. Nous avons montré (Mémoire cité) que le lieu d'un tel point est ici une droite (droite exceptionnelle) formant, avec ∞^1 autres courbes planes d'ordre $m-t\,(0 < t \leqslant m)$, des courbes Γ.

[2]) Loc. cit., p. 10.

lières $C_1, C_2, \ldots, C_k$, et enfin les droites exceptionnelles de la congruence [1]).

Soit C_i une courbe singulière. Elle est multiple d'indice q_i pour les surfaces F, F_1 et elle comptera par suite $q_i^2 + x$ fois $(x \geqslant 0)$ dans l'intersection des deux surfaces. Pour que l'on ait $x > 0$, il faut au moins que l'une des nappes de F touche une nappe de F_1 le long de C_i. Mais on peut voir (comme dans mon Mémoire cité) que cela est en contradiction avec l'hypothèse que nous avons faite, à savoir que les $m\,(m+1)$ points singuliers situés sur une courbe Γ sont généralement distincts. Par suite, on a $x = 0$.

Remarquons enfin que, si Σ possède une droite exceptionnelle d qui, comptée t fois $(0 < t \leqslant m)$, forme avec ∞^1 courbes Γ' d'ordre $m - t$, ∞^1 courbes Γ, sa multiplicité pour la surface F sera égale au nombre i de courbes Γ' situées dans un plan passant par d. Une pareille droite comptera évidemment i^2 fois (et pas plus) dans l'intersection des surfaces F, F_1.

Observation. Les considérations précédentes sur les courbes singulières ne sont plus applicables lorsque ces courbes sont des droites, parce que une droite singulière peut avoir, dans son domaine du premier ordre, des courbes dégénérées de la congruence. C'est ce que M. Montesano a montré (avec d'autres termes) dans le cas $m = 2$ [2]).

3. Les résultats précédents fournissent deux équations sur lesquelles se base le procédé de détermination des différents types de congruences Σ.

Désignons par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ les ordres respectifs des courbes $C_1, C_2, \ldots C_k$, par $m_1, m_2, \ldots, m_h$ les nombres des points d'appui des courbes Γ de Σ sur ces courbes. On a:

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = m\,(m+1).$$

Supposons que la congruence Σ possède un certain nombre ν de

[1]) Rappelons que l'on appelle droite exceptionnelle une droite qui, comptée t fois $(0 < t \leqslant m)$ forme, avec ∞^1 courbes planes Γ', d'ordre $m - t$, dont les plans contiennent cette droite, ∞^1 courbes Γ de la congruence Σ.

[2]) *Sulle congruenze lineari di coniche nello spazio* [Rendiconti del R. Ist. Lombardo, 1893, (2), XXVI]. — *Su i varii tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio* [Rend. R. Acc. di Napoli, 1895].

droites exceptionnelles, respectivement multiples d'indices $i_1, i_2, \ldots, i_\nu$ pour les surfaces F, et posons:

$$\text{(I)} \qquad \varrho = i_1^2 + i_2^2 + \ldots + i_\nu^2 .$$

L'intersection de deux surfaces telles que F donne:

$$\text{(II)} \qquad (mn+1)^2 = mn + \lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 + \ldots + \lambda_k q_k^2 + \varrho .$$

Considérons maintenant une surface F et une courbe de Σ n'appartenant pas à cette surface. Cette courbe ne peut rencontrer F en dehors des courbes singulières, sans quoi la congruence Σ ne serait pas linéaire. Donc on a:

$$\text{(III)} \qquad m\,(mn+1) = m_1 q_1 + m_2 q_2 + \ldots m_k q_k .$$

4. Faisons tout de suite deux remarques qui nous seront utiles dans la suite.

a) Si la courbe singulière C_i a l'ordre λ_i égal au nombre m_i des points d'appui des courbes de Σ sur cette courbe C_i, on a $q_i = n$.

Supposons en effet que l'on puisse avoir $q_i < n$ pour $\lambda_i = m_i$, et considérons un point P de C_i et une droite p issue de P. Parmi les n courbes Γ de Σ dont les plans contiennent p, il en est au moins une qui ne passe pas par P et qui, par conséquent, touche C_i en un point. Faisant varier P (et par suite p) sur C_i, on voit que toutes les courbes de Σ touchent C_i. Mais alors les $m\,(m+1)$ points singuliers situés sur la courbe générique de Σ ne sont plus distincts, ce qui est contre notre hypothèse. Donc $\lambda_i = m_i$ entraîne $q_i = n$.

Le même procédé de démonstration conduit immédiatement à la remarque:

b) Si la courbe singulière C_i a l'ordre $\lambda_i = m_i + 1$, les n courbes de Σ dont les plans passent par une bisécante de C_i contiennent au moins un des points d'appui de cette bisécante sur C_i.

5. Considérons plus particulièrement les congruences Σ dotées de deux courbes singulières ($k=2$). Pour fixer les idées, nous supposerons $m_1 \geqslant \frac{1}{2} m\,(m+1)$.

Les équations (II), (III) deviennent:

$$(nm+1)^2 = nm + \lambda_1 q_1^2 + \lambda_2 q_2^2 + \varrho,$$
$$m(nm+1) = m_1 q_1 + m_2 q_2 .$$

De ces équations on peut déduire immédiatement des limites supérieures de λ_1 et λ_2. Pour cela éliminons n entre les équations précédentes. Il vient:

$$q_2^2(m^2\lambda_2 - m_2^2) - q_2(2m_1m_2q_1 - mm_2) + q_1^2(m^2\lambda_1 - m_1^2)$$
$$+ mm_1q_1 + m^2(\varrho - 1) = 0 .$$

En exprimant que q_2 est réel, on obtient:

$$4q_1^2(m_2^2\lambda_1 + m_1^2\lambda_2 - m^2\lambda_1\lambda_2) - 4m\lambda_2(m_1q_1 - m)$$
$$- 4\varrho(m^2\lambda_2 - m_2^2) - 3m_2^2 \geqslant 0 .$$

Mais on a:

$$m^2\lambda_2 > m_2^2, \quad m_1q_1 > m,$$

(parce que l'on a supposé $m_1 \geqslant \frac{1}{2}m[m+1]$) donc l'inégalité précédente entraîne:

(IV) $$m_2^2\lambda_1 + m_1^2\lambda_2 - m^2\lambda_1\lambda_2 > 0 .$$

On en déduit:

(V) $$\lambda_1 < \frac{m_1^2\lambda_2}{m^2\lambda_2 - m_2^2},$$

car on a $m^2\lambda_2 - m_2^2 > 0$.

Mais λ_1 est au moins égal à m_1, donc on a:

(VI) $$\lambda_2(m^2 - m_1) < m_2^2 .$$

La formule (VI) donne une limite supérieure de λ_2 sauf si l'on a $m_1 \geqslant m^2$. Si $m_1 \geqslant m^2$, λ_2 est quelconque, mais λ_1 est toujours limité supérieurement par (V).

6. Supposons $q_1 < n$ et désignons par q_{11} le nombre de courbes Γ passant par deux points de C_1, par q_{12} le nombre de courbes Γ passant par un point de C_1 et dont les plans seuls passent par un second point de cette courbe. On a évidemment:

$$q_{11} + q_{12} = q_1 .$$

Considérons une bisécante de C_1 et soient P, Q ses points d'appui sur cette courbe. Deux cas peuvent se présenter:

a) Les n courbes Γ dont les plans contiennent P, Q passent au moins par l'un de ces points. Alors on a:

$$q_{11} + 2\,q_{12} = n,$$

et par suite:

$$q_{11} = 2\,q_1 - n; \quad q_{12} = n - q\,.$$

D'après ce que nous avons vu, cela a toujours lieu pour $\lambda_1 = m_1 + 1$, $q_1 < n$.

b) Le contraire a lieu.

Dans ce cas, considérons une droite s'appuyant au moins en trois points P, Q, R sur C_1. Cela est toujours possible, pourvu que C_1 ait l'ordre λ_1 au moins égal à cinq. Or, c'est ce qui arrive ici, car dans le cas le plus défavorable, on a $m = 2$, $m_1 = 3$, et d'autre part, $\lambda_1 > m_1 + 1$, c'est-à-dire $\lambda_1 \geqslant 5$.

Les n courbes Γ dont les plans contiennent la droite P, Q passent, ou non, par les points P, Q, R; mais dans tous les cas, on a $3\,q_{11} + 3\,q_{12} \leqslant q_1$, c'est-à-dire $3\,q_1 \leqslant n$. Mais alors il vient:

$$3\,m\,(mn + 1) - 3\,m_2\,q_2 \leqslant nm_1\,.$$

On vérifie aisément que cette inégalité n'a jamais lieu (en utilisant l'hypothèse $m_1 \geqslant \frac{1}{2}\,m\,[m + 1]$). Par suite, le cas *a*) est seul valable.

Supposons toujours $q_1 < n$ et considérons la surface F relative à un point P de C_1. Cette surface se scinde en deux autres dont l'une, d'ordre mq_1, est le lieu des courbes Γ passant par P, et l'autre, F', d'ordre $m\,(n - q_1) + 1$, est le lieu des courbes Γ dont les plans passent s e u l s par P.

La surface F' passe $q_{12} = n - q_1$ fois par C_1. Les surfaces F' relatives à tous les points de C_1 forment nécessairement un faisceau, et les courbes Γ situées sur une F' forment également un faisceau. S'il n'en était pas ainsi, la congruence Σ ne serait en effet pas linéaire.

Soient q' la multiplicité de C_2 pour F'; $i'_1, i'_2, \ldots, i'_\nu$ les multiplicités respectives des droites exceptionnelles pour F'.

Remarquons que deux surfaces F' n'ont aucune courbe Γ en commun. L'intersection de ces deux surfaces donne donc:

$$\text{(VII)} \qquad [m\,(n - q_1) + 1]^2 = \lambda_1\,(n - q_1)^2 + \lambda_2\,q'^2 + \varrho',$$

où l'on a:

(VIII) $$\varrho' = i_1'^2 + i_2'^2 + \dots i_\nu'^2 .$$

L'intersection d'une F et d'une F' donne, moyennant:

(IX) $$\varrho'' = i_1 i_1' + i_2 i_2' + \dots + i_\nu i_\nu',$$

(X) $$[m(n-q_1)+1](mn+1) = m(n-q_1) + \\ + \lambda_1 q_1 (n-q_1) + \lambda_2 q_2 q' + \varrho'',$$

car ces deux surfaces ont en commun $n - q_1$ courbes Γ.

Enfin, une courbe Γ ne peut rencontrer une surface F' en dehors des courbes singulières, donc on a:

(XI) $$m[m(n-q_1)+1] = m_1(n-q_1) + m_2 q' .$$

7. Nous allons déterminer complètement les congruences pour lesquelles on a $m_1 = m^2$, $m_2 = m$, la courbe C_2 étant une courbe plane d'ordre $\lambda_2 = m$. Alors, d'après une observation déjà faite, on a: $q_2 = n$.

Les formules (II) et (III) deviennent:

(XII) $$(nm+1)^2 = nm + \lambda_1 q_1^2 + mn^2 + \varrho,$$

(XIII) $$nm + 1 = mq_1 + n .$$

D'autre part, la formule (V) donne:

$$\lambda_1 \leqslant m^2 + m + 1 .$$

On arrivera d'ailleurs à une limite inférieure pour λ_1 dans la suite.

Nous distinguerons deux cas:

$$q_1 = n \text{ et } q_1 < n .$$

Si $q_1 = n$, la formule (XIII) donne $n = 1$ et (XII) devient:

$$\lambda_1 + \varrho = m^2 + 1,$$

d'où les deux cas possibles:

$$a) \quad \lambda_1 = m^2 + 1, \quad \varrho = 0;$$

$$b) \quad \lambda_1 = m^2, \qquad \varrho = 1 .$$

Si $q_1 < n$, on a $q' = n - q_1$. En effet, considérons un point P sur C_1 et un point Q sur C_2. Les n courbes Γ dont les plans contiennent P, Q passent toutes par Q (puisque $q_2 = n$), mais il y en a $q_{12} = n - q_1$ qui ne passent pas par P. Ces dernières appartiennent à la surface F' relative à P, donc $q' = n - q_1$. Les formules (VII), (X), (XI), (XII) et (XIII) donnent alors:

$$\begin{aligned} n &= m + 1, \quad q_1 = n - 1 = m, \\ m^2 \lambda_1 + \varrho \ &= m^4 + m^3 + 1, \\ \lambda_1 + \varrho' \ &= m^2 + m + 1, \\ m\lambda_1 + \varrho'' &= m^3 + m^2 + 1. \end{aligned}$$

Mais nous avons vu que les courbes Γ de Σ, situées sur une surface F', forment un faisceau. Les surfaces F' étant d'ordre $m + 1$, chacune d'elles contient donc une droite S par laquelle passent les plans des courbes Γ qu'elle contient. Le lieu de ces droites S est une réglée Δ, enveloppe des plans des courbes Γ. Par suite Δ est d'ordre (et de classe) $n = m + 1$.

Une droite exceptionnelle est certainement simple pour les surfaces F', car autrement elle rencontrerait toute courbe Γ et serait ainsi singulière. Donc, on a $i_1' = i_2' = \ldots = i_\nu'$, et par suite $\varrho' = \nu$. De plus, pour la même raison, toute droite exceptionnelle est rencontrée par chaque droite S en un point variable et est ainsi située sur Δ. Or, Δ étant d'ordre $m + 1$, ne peut être située sur une quadrique, donc on a $\nu \leqslant 2$.

L'hypothèse $\nu = 0$ est inacceptable, car elle entraîne

$$\varrho = \varrho' = \varrho'' = 0$$

et par suite:

$$m\lambda_1 = m^3 + m^2 + 1,$$

certainement impossible pour $m > 1$, ce qui a été supposé.

Si on a $\nu = 1$, il vient:

$$\varrho = i_1^2, \quad \varrho' = 1, \quad \varrho'' = i_1,$$

et

$$\begin{aligned} m^2 \lambda_1 + i_1^2 &= m^4 + m^2 + 1, \\ \lambda_1 &= m^2 + m, \\ m\lambda_1 + i_1 &= m^3 + m^2 + 1, \end{aligned}$$

d'où $i_1 = 1$.

Si on a $\nu = 2$, il vient, par (I), (VIII) et (IX):

$$m^2\lambda_1 + i_1^2 + i_2^2 = m^4 + m^3 + 1,$$
$$\lambda_1 = m^2 + m - 1,$$
$$m\lambda_1 + i_1 + i_2 = m^3 + m^2 + 1,$$

c'est-à-dire $i_1 = 1$, $i_2 = m$.

En résumé, nous avons quatre types de congruences Σ possibles:

a) $\lambda_1 = m^2 + 1$, $\varrho = 0$, $q_1 = n$,

b) $\lambda_1 = m^2$, $\varrho = 1$, $q_1 = n$,

c) $\lambda_1 = m^2 + m$, $\nu = 1$, $\varrho = \varrho' = \varrho'' = 1$, $q_1 = n - 1 = m$,

d) $\lambda_1 = m^2 + m - 1$, $\nu = 2$, $i_1 = 1$, $i_2 = m$, $q_1 = n - 1 = m$.

Nous désignerons respectivement ces congruences par Σ_1, Σ_2 Σ_3 et Σ_4. Nous allons les déterminer complètement.

8. Déterminons d'abord la congruence Σ_1. Les surfaces F, d'ordre $m + 1$, forment un réseau. Les plans des courbes de cette congruence passent tous par un point fixe, O, certainement singulier et qui ne peut être situé que sur C_1.

Soit τ le plan de la courbe C_2. Par un point de τ passe une courbe Γ qui, rencontrant C_2 en m points, dégénère nécessairement en une droite du plan τ et en une courbe Γ' d'ordre $m - 1$. Comme il ne peut y avoir ∞^2 courbes Γ dégénérées (car alors Σ_1 serait réductible), il y a seulement ∞^1 droites de τ qui entrent dans des courbes Γ dégénérées. Ces droites forment évidemment un faisceau, car autrement Σ_1 ne serait pas linéaire. De plus, les courbes telles que Γ', d'ordre $m - 1$, sont dans les plans d'un faisceau dont l'axe a_1 passe certainement par O. Ces courbes Γ' engendrent une surface Φ, d'ordre m, contenant C_1 et a, car cette surface, jointe au plan τ, forme la surface F relative à un point de a. Une courbe Γ, non dégénérée, ne peut rencontrer Φ en dehors de C_1, car autrement elle appartiendrait toute entière à Φ et la congruence ne serait pas linéaire. Par suite, les m_2 points de rencontre de Φ avec C_2 appartiennent tous à la courbe C_1.

Chaque surface F contient une courbe Γ' et la droite du plan τ qui, jointe à cette Γ', forme une courbe Γ. Par suite, le plan τ rencontre une surface F en la courbe C_2 et en une droite variable dans un faisceau. Le centre de faisceau de droites (qui coïncide avec le point de rencontre de τ avec la droite a) ne peut être que le point de rencontre de C_1 avec τ, non situé sur C_2. Ce point ne peut être que le point O (commun aux plans des courbes de Σ_1); il suffit pour s'en convaincre de considérer les ∞^1 surfaces F relatives aux points du plan τ.

La congruence Σ_1 est le lieu des courbes planes d'ordre m et de genre $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ s'appuyant en m^2 points sur une courbe C_1 d'ordre m^2+1 et en m points sur une courbe plane C_2, d'ordre m, rencontrant C_1 en m_2 points. Les plans de courbes de la congruence passent tous par le point de rencontre de C_1 avec le plan de C_2 situé en dehors de cette dernière courbe.

9. Passons à la détermination de la congruence Σ_2. Nous avons $\lambda_1 = m^2$, $\varrho = 1$, $\nu = 1$, $q_1 = n$.

Par le même raisonnement qui vient d'être employé au paragraphe précédent, on établit que la courbe composée $C_1 + d$, d étant la droite exceptionnelle, s'appuie en m^2 points sur C_2 et que le dernier point de rencontre avec le plan de C_2 est situé sur les plans de toutes les courbes de la congruence. Mais on remarquera d'autre part que ce point est situé sur la droite exceptionnelle d, donc C_1 et C_2 se rencontrent en m^2 points, et d ne rencontre pas C_2.

Soit x le nombre des points d'appui de d sur C_1, et supposons que d, comptée t fois $(0 < t < m)$, forme, avec ∞^1 courbes Γ_1, d'ordre $m-t$, dont les plans contiennent d, ∞^1 courbes Γ de la congruence. Les courbes Γ_1 engendrent une surface Ψ d'ordre $m-t+k$, k étant le nombre de courbes Γ_1 passant par un point de d. Ψ contient certainement C_1 et C_2, car les Γ_1 s'appuient en m^2-x points sur C_1 et en m points sur C_2, et on a $x < m^2$. Or, C_1 et C_2 ne peuvent être situées sur une surface d'ordre inférieur à $m+1$, car toutes les courbes Γ, rencontrant cette surface en $m(m+1)$ points, seraient situées sur cette surface et la congruence n'existerait plus. Donc:

$$m - t + k \geqslant m + 1 .$$

D'autre part, la surface F relative à un point de d contient Ψ, donc:

$$m - t + k \leqslant m + 1 .$$

Par suite, le signe $=$ est seul valable, et on a $k = t + 1$.

Les intersections d'une courbe Γ_1 avec une surface F tombent toutes sur C_1, C_2 ou d, donc:

$$(m-t)(m+1)=m^2-x+m+(m-t),$$

d'où:

$$x=m(t+1).$$

La congruence Σ_2 est le lieu des courbes planes d'ordre m et de genre $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ s'appuyant en m^2 points sur une courbe plane C_2 d'ordre m, rencontrant C_1 en m^2 points. Les plans des courbes de Σ_2 passent par le point commun au plan de C_2 et à une droite qui, comptée t fois, forme avec des courbes planes d'ordre $m-t$ des courbes de la congruence. Cette droite rencontre C_1 en $m(t+1)$ points.

10. Déterminons maintenant la congruence Σ_3 pour laquelle on a $\lambda_1=m^2+m$, $\nu=\varrho=\varrho'=\varrho''=1$, $q_1=n-1$.

Soit d la droite exceptionnelle et supposons que, comptée t fois, elle forme, avec ∞^1 courbes planes Γ', d'ordre $m-t$, dont les plans passent par d, ∞^1 courbes Γ de Σ_3.

Rappelons que les courbes Γ dont les plans passent seuls par un point de C_1, engendrent une surface F', d'ordre $m+1$, sur laquelle elles forment un faisceau. L'axe δ des plans de ces courbes appartient à F' et s'appuie sur C_1 (nécessairement en $m^2+m-m^2=m$ points) et sur d. Les surfaces F' relatives aux différents points de C_1 forment un faisceau et les droites S relatives engendrent une réglée Δ, d'ordre $m+1$.

Soit x le nombre de points d'appui de d sur C_1.

Puisque la droite d est simple pour les surfaces F et F', dans un plan passant par d ne se trouve qu'une courbe Γ' (s'appuyant en m^2-x points sur C_1) et, par suite, il ne se trouve qu'une droite S. On en conclut que d est multiple d'indice m pour Δ.

Les courbes Γ' forment une surface Ψ, d'ordre $m-t+k$, k étant le nombre de courbes Γ' passant par un point de d.

Puisque d est m-uple pour Δ, par un point de d passeront m droites S de Δ, donc la surface F, relative à ce point, contiendra les m surfaces F' relatives à ces droites, la surface Ψ et éventuellement quelqu'autre surface. On aura donc, F étant d'ordre $m(m+1)+1$:

$$m^2+m+1\geqslant m(m+1)+m-t+k,$$

c'est-à-dire:

$$t+1 \geqslant m+k.$$

Mais d'autre part, l'ordre de Φ est au moins égal à un, donc on a:

$$m-t+k \geqslant 1,$$

et par suite:

$$t+1=m+k,$$

et Φ est un plan.

Soient x et y les nombres des points d'appui de d sur C_1, C_2 respectivement. Une courbe Γ' s'appuie donc en m^2-x points sur C_1, en $m-y$ points sur C_2; d'autre part, elle ne peut rencontrer une F ou une F' en dehors de C_1, C_2 et d, sans quoi Σ_3 ne serait pas linéaire. Donc on a:

$$mx+(m+1)\,y=mt\,(m+1)+m,$$
$$x+y=mt+m.$$

La courbe C_2 étant plane, y peut seulement prendre les valeurs m, 1, 0.

Si $y=m$, les courbes Γ' ne s'appuient pas sur C_2, mais elles s'appuient sur C_1 et Φ contient C_1. Or, cela est impossible, car C_1 ne peut être plane alors que Φ est un plan.

On ne peut non plus avoir $y=1$, car les formules précédentes conduiraient alors à $m=1$.

Reste l'hypothèse $y=0$. Alors on a $t=m-1$, $x=m^2$.

Le plan Φ coïncide nécessairement avec le plan de C_2 $(k=0)$ et les courbes Γ' sont des droites de ce plan. Les surfaces F' rencontrent le plan de C_2 en la courbe C_2 et en une droite variable Γ', par suite les intersections de la courbe C_1 avec le plan de C_2 sont toutes sur la courbe C_2.

La congruence Σ_3 est le lieu des courbes planes d'ordre m et de genre $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ s'appuyant en m^2 points sur une courbe C_1 d'ordre m^2+m et en m points sur une courbe plane C_2, d'ordre m, s'appuyant en m^2+m points sur C_1. Les plans des courbes de la congruence enveloppent une surface d'ordre $m+1$, lieu des droites s'appuyant en m points sur C_1 et en un point sur une droite d rencontrant C_1 en m^2 points et qui, comptée $m-1$ fois, forme avec une droite quelconque du plan de C_2 s'appuyant sur d, une courbe de la congruence.

11. Rappelons que la congruence Σ_4 possède, entre la courbe singulière plane C_2, d'ordre m, une courbe singulière C_1, d'ordre m^2+m-1, et deux droites exceptionnelles, d_1, d_2, respectivement multiples d'indices un et m pour les surfaces F (d'ordre m^2+m+1), et simples pour les surfaces F' (d'ordre $m+1$). De plus, la congruence est de classe $n=m+1$ et les plans de ces courbes enveloppent une surface Δ d'ordre $m+1$, lieu de droites S s'appuyant nécessairement en $m-1$ points sur C_1 et en un point sur d_1 et d_2. Les courbes Γ de Σ_4 dont les plans passent par une droite S forment une surface F', d'ordre $m+1$. Ces surfaces F' forment un faisceau. Les droites S ne s'appuient pas sur C_2.

Par le raisonnement employé au paragraphe précédent, on établit que:

1) la droite exceptionnelle d_1 s'appuie en m^2 points sur C_1 et ne rencontre pas C_2. Elle est multiple d'ordre m pour Δ et, comptée $m-1$ fois, elle forme, avec les droites du plan de C_2 qui la rencontrent, ∞^1 courbes de la congruence.

2) la droite exceptionnelle d_2 s'appuie en $2m-1$ points sur C_1 et en un point sur C_2. Elle est simple pour Δ. Il existe une surface Ψ_2, d'ordre m^2, passant $m-1$ fois par C_1, m fois par C_2 et m fois par d_2; les sections de cette surface par les plans passant par d_2 se décomposent, en dehors de d_2, en m courbes planes d'ordre $m-1$ dont chacune s'appuie en m^2-2m+1 points sur C_1 et en $m-1$ points sur C_2. La droite d_2, jointe à une quelconque de ces courbes d'ordre $m-1$, forme une courbe de la congruence Σ_4.

3) la courbe C_1 ne rencontre pas le plan de C_2 en dehors de cette courbe.

La congruence Σ_4 est le lieu des courbes planes d'ordre m et de genre $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ s'appuyant en m^2 points sur une courbe C_1, d'ordre m^2+m-1 et en m points sur une courbe plane C_2, d'ordre m, rencontrant C_1 en m^2+m-1 points. Il existe deux droites exceptionnelles, l'une s'appuie en m^2 points sur C_1 et forme, avec les droites d'un faisceau du plan de C_2, des courbes de la congruence; l'autre rencontre C_1 en $2m-1$ points, C_2 en un point, et forme, avec des courbes planes d'ordre $m-1$ engendrant une surface d'ordre m^2, des courbes de la congruence.