Géométrie analytique. — Sur la cinquième congruence de cubiques gauches de M. Stuyvaert (*),

par Lucien GODEAUX, candidat en sciences physiques et mathématiques.

Dans un mémoire couronné par l'Académie (**), M. Stuyvaert a étudié les congruences linéaires de cubiques gauches dont la courbe générique est représentée par l'évanouissement d'une matrice à deux lignes et trois colonnes, chaque élément de cette matrice étant au plus linéaire par rapport aux paramètres qui fixent la courbe dans la congruence. Il existe six types fondamentaux de pareilles congruences ; nous nous occuperons ici du cinquième de la classification de M. Stuyvaert.

Désignons, suivant l'usage, par $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4)$ les coordonnées courantes d'un point de l'espace et par a_x, b_x,... des formes linéaires par rapport à ces variables. Les équations de la cinquième congruence de M. Stuyvaert, congruence que nous désignerons par Γ, sont :

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x & \alpha_1 a'_x + \alpha_2 b'_x & \alpha_1 a''_x + \alpha_2 b''_x \\ \alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x & \alpha_1 d'_x & \alpha_1 d''_x \end{matrix} \right\| = 0. \qquad (\Gamma)$$

M. Stuyvaert a établi que les courbes de cette congruence s'appuient sur un ensemble de courbes singulières composé d'une cubique gauche, d'une bisécante de cette cubique et d'une quintique plane. Les points d'appui sont tous variables et sont au nombre de neuf ; il reste donc à fixer la dixième condition à laquelle obéissent les courbes de Γ : c'est l'objet de cette note. En même temps, nous établirons un mode de génération de la congruence qui permettra d'en étudier immédiatement la plupart des propriétés.

(*) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe de sciences), nº 4, pp. 371-375, 1911.

(**) *Cinq études de géométrie analytique* (Prix François Deruyts, 1906). Gand, librairie Van Goethem, 1907 (pp. 104, 113-114).

1. — Considérons la quadrique

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 a'_x + \alpha_2 b'_x & \alpha_1 a''_x + \alpha_2 b''_x \\ \alpha_1 d'_x & \alpha_1 d''_x \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

et la surface cubique

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x & 0 & \alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x \\ a'_x & b'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & d''_x \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Ces surfaces ont en commun une courbe du sixième ordre se composant de la cubique gauche C_3 d'équations

$$\begin{Vmatrix} a'_x & b'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & d''_x \end{Vmatrix} = 0, \tag{c_3}$$

et d'une seconde cubique gauche γ, s'appuyant en cinq points sur la première, et dont les équations dépendent évidemment des paramètres α_1, α_2, α_3. Cherchons à mettre les équations de cette courbe γ sous forme d'une matrice à deux lignes et trois colonnes égalée à zéro.

La quadrique (1) est le lieu des intersections des plans homologues des faisceaux

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1(\alpha_1 a'_x + \alpha_2 b'_x) + \lambda_2 d'_x = 0, \\ \lambda_1(\alpha_1 a''_x + \alpha_2 b''_x) + \lambda_2 d''_x = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Des équations précédentes, on déduit

$$\frac{\lambda_1\alpha_1}{\begin{vmatrix} b'_x & d'_x \\ b''_x & d''_x \end{vmatrix}} = \frac{\lambda_1\alpha_2}{\begin{vmatrix} d'_x & a'_x \\ d''_x & a''_x \end{vmatrix}} = \frac{\lambda_2}{\begin{vmatrix} a'_x & b'_x \\ a''_x & b''_x \end{vmatrix}}.$$

En tenant compte de ces dernières, l'équation (2) peut s'écrire

$$\lambda_1\alpha_1^2 a_x + \lambda_1\alpha_1\alpha_2 b_x + \lambda_1\alpha_1\alpha_3 c_x + \lambda_2\alpha_1 d_x + \lambda_2\alpha_2 f_x = 0. \tag{4}$$

On voit ainsi que la courbe γ est le lieu des intersections des éléments homologues de trois faisceaux de plans (3), (4) deux à deux projectifs. Par suite, les équations de γ peuvent s'écrire

$$\left\| \begin{array}{ccc} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x + \alpha_3 c_x & \alpha_1 a'_x + \alpha_2 b'_x & \alpha_1 a''_x + \alpha_2 b''_x \\ \alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x & \alpha_1 d''_x & \alpha_1 d''_x \end{array} \right\| = 0.$$

Ces équations sont aussi celles d'une cubique gauche générique de la congruence Γ de M. Stuyvaert; donc, lorsque α_1, α_2, α_3 varient, le lieu de la cubique γ est cette congruence Γ. Observons immédiatement que la cubique C_3 est singulière d'indice cinq pour Γ, c'est-à-dire qu'une courbe de cette congruence s'appuie généralement en cinq points sur C_3.

2. — Lorsque les paramètres α_1, α_2, α_3 varient, les quadriques (1) engendrent un faisceau Φ dont la base est constituée par la cubique C_3 et une de ses bisécantes C_1 d'équations

$$d'_x = d''_x = 0. \tag{c_1}$$

Les surfaces cubiques (2) engendrent un réseau Σ et passent par la courbe C_3, par une de ses bisécantes

$$b'_x = b''_x = 0$$

et par cinq points situés dans le plan π dont l'équation est

$$c_x = 0. \tag{π}$$

Fixons une quadrique de Φ, c'est-à-dire dans l'équation (1) fixons les valeurs de α_1, α_2 (par leur rapport). Ces valeurs de α_1, α_2, portées dans l'équation (2), définissent un faisceau de surfaces de Σ. Les surfaces de ce faisceau marquent, sur la quadrique du faisceau Φ envisagée, un faisceau de courbes γ de Γ, ayant quatre points-base. Ces points, qui sont évidemment singuliers pour la congruence Γ, sont les intersections, en dehors de C_3, des trois surfaces (1)

$$\left| \begin{array}{ccc} \alpha_1 a_x + \alpha_2 b_x & 0 & \alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x \\ a'_x & b'_x & d'_x \\ a''_x & b''_x & d''_x \end{array} \right| = 0, \tag{5}$$

$$c_x (b'_x d''_x - b''_x d'_x) = 0,$$

α_1 et α_2 étant fixes.

Un calcul simple montre que l'un des points en question est l'intersection de la droite C_1 et du plan

$$\alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x = 0.$$

Appelons ce point P_1. Les autres points P_2, P_3, P_4 sont les intersections, en dehors de C_3, des trois surfaces π, (1) et (5).

Faisons maintenant varier α_1 et α_2 ; le point P_1 décrit la droite C_1, et c'est le seul point d'appui de la courbe γ sur cette droite, car autrement toutes les courbes γ ayant cinq points et une bisécante en commun avec C_3 coïncideraient toutes avec cette courbe.

Le lieu des points P_2, P_3, P_4 est une courbe plane C_5, du cinquième ordre, intersection du plan π et de la surface

$$a_x(b'_x d''_x)^2 + d_x(b'_x d''_x)\,(a'_x b''_x) + b_x(b''_x d'_x)\,(a'_x d''_x) + f_x(a''_x d'_x)\,(a'_x b''_x) = 0\,(^*),$$

les déterminants étant dénotés par leur diagonale principale.

La courbe C_5 passe évidemment par le point commun à C_1 et au plan π et a de plus trois points doubles sur C_3.

Nous venons de voir que les courbes de Γ situées sur une quadrique de Φ passent toutes par un point P_1 de la droite C_1. Inversement, les courbes γ passant par un point de C_3 sont situées sur une quadrique de Φ ; donc :

La cinquième congruence de cubiques gauches de M. Stuyvaert est le lieu des courbes s'appuyant en cinq points sur une cubique gauche C_3, *en trois points sur une quintique plane* C_5 *ayant trois points doubles sur* C_3, *et en un point sur une bisécante* C_1 *de* C_3 *s'appuyant sur* C_5. *Les courbes de la congruence se distribuent par faisceaux sur les quadriques passant par* C_1 *et* C_3 *de telle manière qu'une de ces quadriques contient un seul faisceau*

(*) Cette équation ne coïncide pas avec celle qui a été donnée par M. Stuyvaert (*loc. cit.*), mais le lecteur verra aisément que cela tient à une erreur typographique qui s'est glissée dans le mémoire de ce géomètre.

ayant un point de base sur C_1 *et qu'inversement un point de* C_1 *est le point-base d'un seul faisceau.*

Cette génération de la congruence Γ permet d'arriver rapidement aux principales propriétés projectives de cette congruence, par exemple à l'évaluation de l'ordre d'une surface engendrée par les courbes γ satisfaisant à une certaine condition.

Morlanwelz, décembre 1910.

Bruxelles. — Imprimerie HAYEZ, rue de Louvain, 112.