GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE. — **Sur les transformations birationnelles involutives du plan** (1),

par LUCIEN GODEAUX, candidat en sciences physiques et mathématiques.

Nous nous sommes proposé d'énumérer les différents types de transformations birationnelles involutives du plan qui peuvent se présenter. Nous sommes parvenu à répartir ces transformations en quatre catégories et à déterminer complètement celles qui rentrent dans les trois premières catégories. Relativement aux transformations de la quatrième catégorie, nous avons ramené leur détermination à la solution de deux problèmes particuliers rentrant dans le problème unique suivant : *Étant donné une involution plane et un système doublement infini d'indice supérieur à l'unité de courbes planes de classe donnée, se peut-il qu'une et une seule courbe du système ait aux points d'un groupe de l'involution des points de rebroussement maximum, c'est-à-dire des points par chacun desquels il ne passe qu'une tangente à la courbe?*

Les cas particuliers de ce problème, dont dépend la solution de la question que nous nous sommes posée initialement, sont relatifs aux cas où l'involution plane est d'ordre un (identité) ou d'ordre quatre, et dans ce dernier cas l'involution est engendrée par les intersections des coniques d'un réseau.

M. Bertini (2) et S. Kantor (3) s'étaient déjà occupés des transformations birationnelles involutives du plan, mais à un autre point de vue. Ces géomètres avaient déterminé (indépendamment l'un de l'autre) les types de transformations birationnellement irréductibles, en démontrant qu'étant donné une

(1) Extrait des *Bull. de l'Acad. roy. de Belgique* (Classe des sciences), n° 3, pp. 217-225, 1911.

(2) *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano.* (ANNALI DI MATEMATICA, 1877 (2), VIII.)

(3) *Sur une théorie des courbes et des surfaces admettant des correspondances univoques.* (COMPTES RENDUS, 1885, t. C.)

transformation birationnelle involutive quelconque, il existe toujours une transformation crémonienne la ramenant à l'un des types établis, mais qu'il n'existe aucune transformation crémonienne du plan ramenant l'un à l'autre deux types fondamentaux.

Relativement aux transformations dont nous nous occupons ici, transformations qu'on appelle souvent *involutions planes d'ordre deux,* nous adopterons la terminologie de M. Castelnuovo (1).

La *classe* d'une transformation ou involution plane d'ordre deux est le nombre de couples de cette involution situés sur une droite générique du plan.

Il peut exister certains points (en nombre fini) auxquels correspondent ∞^1 points; de tels points seront dits *fondamentaux* et les courbes engendrées par leurs ∞^1 conjugués, *courbes fondamentales*.

Enfin, nous aurons à parler d'involutions binaires données sur des êtres unicursaux simplement infinis; nous leur réserverons la notation habituelle I_1^n.

1. — Nous partons de la remarque bien simple que tout couple de points du plan peut être considéré comme l'intersection d'une droite du plan et d'une conique d'un réseau ponctuel Ω. Il est loisible de choisir ce réseau comme on le veut, mais pour que la règle précédente ne souffre aucune exception, il faut que le réseau Ω soit dépourvu de points-base.

Cela étant, soit Φ une transformation birationnelle involutive du plan. Nous pouvons considérer chaque couple de points correspondants de Φ comme l'intersection d'une droite d et d'une conique C appartenant à Ω.

La droite d est évidemment mobile, et son lieu peut être soit simplement infini, soit doublement infini.

---

(1) *Sulla razionalità delle involuzioni piane.* (MATH. ANNALEN, 1893, Bd XLIV.)

De même, le lieu de la conique C est simplement ou doublement infini.

Nous sommes donc conduit à répartir les transformations Φ en quatre catégories définies par les caractères suivants :

I. — Transformations dont les couples de points correspondants sont les intersections de droites et de coniques appartenant respectivement à des systèmes simplement infinis.

II. — Transformations dont les couples de points correspondants sont des intersections de droites d'un système simplement infini et de coniques d'un réseau.

III. — Transformations dont les couples de points correspondants sont des intersections de droites du plan et de coniques d'un système simplement infini.

IV. — Transformations dont les couples de points correspondants sont des intersections de droites du plan et de coniques d'un réseau.

Nous désignerons respectivement par Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 les transformations de ces quatre catégories.

2. *Transformations de la première catégorie.* — Soit Γ_1 le système simplement infini de droites et Ω_1 le système simplement infini (compris dans le réseau Ω) de coniques caractérisant les transformations Φ_1.

Par un point d'une droite quelconque de Γ_1 ne passe qu'une conique de Ω_1, et comme cette droite ne peut pas faire partie de Ω_1, ce système est un faisceau.

De même, le système Γ_1 ne peut être qu'un faisceau de droites.

Les transformations de la première catégorie sont déterminées par les intersections des droites d'un faisceau et des coniques d'un faisceau.

Il est évident que les points-base de ces faisceaux sont des points fondamentaux. La courbe fondamentale correspondant au sommet du faisceau de droites est la conique de Ω_1 passant par ce point, et la courbe fondamentale qui correspond à un point-base du faisceau de conique Ω_1 est la droïte du faisceau Γ_1 passant par ce point.

3. *Transformations de la seconde catégorie.* — Soit Φ_2 une transformation de la seconde catégorie, caractérisée par un système ∞^1 de droites Γ_1 et un réseau de coniques Ω. Une droite de Γ_1 porte un nombre simplement infini de couples de Φ_2, donc à une droite de Γ_1 correspondent ∞^1 coniques de Ω ; inversement, à une conique de Ω correspond un nombre fini de droites de Γ_1.

Pour que la transformation Φ_2 soit birationnelle, le système Γ_1 doit être un faisceau. De plus, une droite de ce faisceau ne peut pas faire partie de l'enveloppe du système des coniques de Ω qui lui correspondent, car Φ_2 se réduirait à l'identité; par suite, à une droite de Γ_1 correspondent dans Ω les coniques d'un faisceau.

On a ainsi dans Ω une variété ∞^1 de faisceau ω de coniques. On peut supposer qu'un de ces faisceaux ω correspond à n droites du faisceau Γ_1, et alors entre les droites de Ω_1 et les faisceaux ω on a une correspondance $(n, 1)$.

Nous allons maintenant démontrer qu'une conique de Ω ne peut appartenir qu'à un seul faisceau ω. Supposons, si cela est possible, qu'une conique E de Ω appartient à deux faisceaux ω_1, ω_2 correspondants à des droites de Γ_1. Si d est une droite dont l'intersection avec E donne un couple de Φ_2, il en sera évidemment de même des intersections de d avec les autres coniques de ω_1 ou de ω_2. Alors, si ω_1 et ω_2 ne se confondent pas en un seul faisceau, la correspondance Φ_2 n'est pas birationnelle, ce qui doit être, d'où la propriété annoncée. Tous les faisceaux ω ont, par suite, une conique fixe commune.

Les groupes de n droites du faisceau Γ_1, tels qu'à chacun de ces groupes correspond un seul faisceau ω, forment évidemment une involution binaire I_1^n.

Les transformations de la seconde catégorie sont déterminées par l'établissement d'une homographie entre les faisceaux de coniques d'un réseau ayant une conique fixe commune et les groupes d'une involution binaire I_1^n *donnée dans un faisceau de droites.*

Il n'est pas besoin de faire remarquer que les transformations des deux premières catégories sont de classe zéro.

Soit maintenant P le sommet du faisceau Γ_1 ; ce point est évidemment un point fondamental pour Φ_2. Pour chercher l'ordre de la courbe fondamentale relative à ce point, nous utiliserons le principe de correspondance de Chasles. Soient x une droite ne passant pas par P, (X_1), (X_2) deux ponctuelles placées sur cette droite. Par un point X_1, menons la conique de Ω passant aussi par P ; cette conique détermine un faisceau ω et à ce faisceau correspondent n droites de Γ_1 marquant sur x n points X_2. Inversement, à un point X_2 correspondent deux points X_1 ; par suite, les ponctuelles (X_1), (X_2) sont liées par une correspondance $(2,n)$ et il y a $n + 2$ coïncidences donnant des points de la courbe dont il est question.

Répétons le raisonnement précédent en supposant que x passe par P ; on voit alors que deux points de cette droite appartiennent à la courbe en dehors de P ; donc :

La courbe fondamentale relative à P *est d'ordre* $n + 2$ *et passe* n *fois par* P.

Soit E la conique de Ω commune à tous les faisceaux ω. Les bases de ces faisceaux déterminent sur E une involution I_1^4. Les droites issues de P marquent sur E une involution I_1^2. D'autre part, les groupes des involutions I_1^4, I_1^2 sont liés par une correspondance $(1,n)$; il y a donc $2n + 4$ points de E qui font à la fois partie d'un groupe de I_1^4 et d'un groupe correspondant de I_1^2, et ces points sont évidemment des points fondamentaux pour Φ_2. La courbe fondamentale relative à un de ces points est évidemment la droite qui le joint à P.

Les correspondances Φ_2 *possèdent* $2n + 4$ *points fondamentaux sur la conique commune à tous les faisceaux* ω ; *les courbes fondamentales correspondantes sont les droites de* Γ_1 *passant par ces points.*

4. *Transformations de la troisième catégorie.* — Soit Φ_3

une pareille transformation caractérisée par un système (∞^1) Ω_1 de coniques. En répétant le raisonnement du paragraphe précédent où l'on intervertit les locutions droite et conique, on arrive aux théorèmes suivants :

Les transformations de la troisième catégorie sont déterminées par l'établissement d'une homographie entre les faisceaux de droites ayant une droite commune fixe et les groupes d'une involution binaire I_1^n *donnée dans un faisceau de coniques.*

Ces transformations sont évidemment de classe n. Désignons en effet par γ un faisceau correspondant à une conique du faisceau Ω_1. Une droite quelconque détermine un seul faisceau γ qui, à son tour, détermine n coniques de Ω_1, d'où la vérification de la classe.

Chaque point-base du faisceau Ω_1 *est fondamental et la courbe fondamentale qui lui correspond est d'ordre* $2n + 1$. *Cette courbe passe* $n + 1$ *fois par ce point et* n *fois par les autres points-bases de* Ω_1.

Il y a $2n + 1$ *points fondamentaux sur la droite commune à tous les faisceaux* γ, *et les courbes fondamentales qui leur correspondent sont les coniques du faisceau* Ω_1 *qu'ils déterminent.*

5. *Transformations de la quatrième catégorie.* — Soit Φ_4 une transformation dont les couples sont des intersections des droites du plan et des coniques d'un réseau Ω. Une droite du plan porte généralement un nombre fini n_1 de couples de Φ_4 et de même une conique de Ω porte un nombre fini n_2 de ces couples. Si l'on considère comme correspondantes une droite du plan et une conique de Ω dont l'intersection est un couple de Φ_4, le plan réglé et Ω sont liés par une correspondance (n_2, n_1).

Soit P un point quelconque du plan (non fondamental pour Φ_4). Aux droites passant par P correspondent des coniques de Ω

formant un système simplement infini Σ, et ce système Σ doit être tel que par P il ne passe qu'une seule de ses coniques. Soit ν l'indice de Σ. Une première solution s'aperçoit immédiatement : c'est $\nu = 1$; mais nous allons voir qu'il y en a d'autres.

Pour cela, rapportons projectivement les coniques de Ω aux droites d'un plan arbitraire π ; le plan de Ω sera représenté sur le plan quadruple π, et Σ sera représenté par un système de droites Σ' dont l'indice est aussi égal à ν. Soit P' le point image de P ; le système Σ' doit être tel que par P' ne passe qu'une seule de ses droites. Alors P' doit faire partie de l'enveloppe σ' de Σ' et nous sommes ramenés au problème suivant :

Quelles sont les courbes σ', de classe assignée ν, possédant un point P' où toutes les tangentes sont confondues?

Une solution sera fournie par une conique passant par P', une autre solution sera donnée par une cubique plane possédant un point de rebroussement en P'.

Supposons que nous connaissions une courbe σ' donnant la solution générale du problème précédent. Retournons au plan du réseau Ω et désignons par P_1, P_2, P_3 les points qui, avec P, ont pour image sur le plan π le point P'. Les points P, P_1, P_2 et P_3 seront donc les points-bases d'un faisceau de coniques de Ω. La courbe σ' aura pour correspondante une courbe σ (enveloppe de Σ) passant par les points P, P_1, P_2 et P_3.

Pour que la transformation Φ_4 soit birationnelle, il faudra encore qu'à la conique de Σ passant par P ne corresponde qu'une droite passant par P.

Considérons maintenant toutes les droites du plan qui ont pour correspondantes les coniques de Ω passant par P (et par suite par P_1, P_2, P_3) ; ces droites vont former un certain système ∞^1 Λ dont l'indice sera évidemment égal à l'indice ν de Σ. Par le point P ne peut passer qu'une seule droite de Λ, et il doit en être de même en P_2, P_3 et P_4. De plus, à une droite passant par P, P_1, P_2 ou P_3 ne peut correspondre qu'une conique de Ω passant par ces quatre points. En désignant par λ l'enveloppe de Λ, nous sommes donc ramenés au problème suivant, analogue à celui qui a été rencontré plus haut :

Quelles sont les courbes λ, de classe ν, possédant quatre points où toutes les tangentes se confondent?

6. — A l'ensemble des ∞^2 faisceaux de rayons du plan correspondent ∞^2 systèmes Σ, et tous ces systèmes peuvent avoir en commun un certain nombre m_1 de coniques fixes (chaque conique fixe étant comptée avec sa multiplicité par Σ). Nous avons admis qu'une conique de Ω portait n_2 couples de points de Φ_4. En désignant par m'_1 le nombre des intersections de deux systèmes Σ absorbés par les éléments-base, on a évidemment

$$n_2 = \nu^2 - m'_1,$$

et les courbes σ forment un système d'indice $2n_2$.

De même, si les systèmes Λ possèdent m_2 éléments-base et que dans l'intersection de deux Λ ces éléments-base absorbent m'_2 unités, on a

$$n_1 = \nu^2 - m'_2,$$

et les courbes λ forment un système d'indice $2n_1$.

Nous pouvons maintenant poser nettement les problèmes dont dépend la détermination des transformations Φ_4.

Appelons *point de rebroussement maximum* un point d'une courbe par lequel ne passe qu'une tangente à cette courbe, et remarquons qu'un point du plan n'est un point de rebroussement maximum que pour une courbe λ et qu'un point du plan π n'est de même qu'un point de rebroussement maximum que pour une seule courbe σ'.

Retournons momentanément au plan π et aux courbes σ'; le problème qui se pose est le suivant :

A) *Peut-il exister des systèmes doublement infinis de courbes de classe ν tels que par deux points passent* $2n_2$ *de ces courbes et qu'un point du plan soit un point de rebroussement maximum pour une seule de ces courbes?*

Occupons-nous maintenant des courbes λ. Remarquons que les groupes de quatre points communs à deux coniques du réseau Ω forment une involution plane du quatrième ordre H. Le problème qui se pose s'énonce :

B) *Peut-il exister des systèmes doublement infinis de courbes de classe* ν *tels que par deux points passent* $2n_1$ *de ces courbes et qu'il y ait une seule courbe présentant aux points de chaque groupe d'une involution d'ordre* H *des points de rebroussement maximum?*

Ces deux problèmes sont, comme on le voit, des cas particuliers du problème suivant :

C) *Étant donné une involution plane d'ordre* n *et un système doublement infini d'indice supérieur à un* (1) *de courbes de classe assignée, se peut-il qu'il existe une seule courbe de ce système présentant en chaque groupe de l'involution des points de rebroussement maximum ?*

On peut enfin dire que :

La détermination des transformations de la quatrième catégorie dépend de la solution du problème C *pour* $n = 1$ *et* 4.

Liége, le 16 décembre 1910.

---

(1) Si l'indice était égal à un, il ne pourrait pas exister de points multiples variables d'après un théorème de M. Bertini. (Voir SEVERI, *Lezioni di geometria algebrica,* Padova, 1908, p. 28.)