Sur le mouvement d'un point matériel soumis à l'action de deux centres fixes

PAR

LUCIEN GODEAUX

Candidat en sciences physiques et mathématiques

Extrait de *Ciel et Terre. — Bulletin de la Société Belge d'Astronomie*, n° 5 [1910].

BRUXELLES

Société Belge d'Astronomie

SUR LE MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SOUMIS A L'ACTION DE DEUX CENTRES FIXES

Étant donné un point matériel soumis à l'action de deux forces passant respectivement par deux points fixes, je démontre que le volume décrit par le triangle ayant pour sommets les points fixes et le point mobile pendant un temps t est le même, quelle que soit la position initiale du mobile sur sa trajectoire. Réciproquement, si un point matériel mobile suit la *loi des volumes*, il est soumis à l'action d'une force dont la direction s'appuie sur une droite fixe. La méthode employée pour établir ces propriétés est analogue à celle qui a été utilisée par M. E. Bertrand dans son cours de Mécanique de l'École des Mines de Mons (1906-07) pour résoudre le problème analogue d'un point matériel soumis à l'action d'un centre fixe (1).

1. — Soient O_1, O_2 deux points fixes et M un point mobile soumis à l'action de deux forces dirigées l'une F_1 suivant MO_1, l'autre F_2 suivant MO_2 (fig. 1). Nous ne faisons aucune hypothèse sur la nature des forces F_1, F_2. Supposons qu'à un moment donné le point M soit en M_1 et que sa vitesse soit v (2). Au bout d'un temps très petit t, le mobile M sera venu en M^2. Si maintenant on supprimait les

---

(1) On retrouvera le raisonnement de M. Bertrand en supposant dans ce qui suit que F_2 est identiquement nulle et en remplaçant l'expression « tétraèdre $O_1 O_2 \chi \gamma$ » par l'expression « triangle $O_1 \chi \gamma$ ».

(2) Nous supposons que la direction de la vitesse ne rencontre pas la droite $O_1 O_2$ et que cette vitesse est quelconque.

forces F_1, F^2, le mobile continuerait à se mouvoir le long de la droite M_1, M_2 et au bout du même temps t il serait en M'_3 tel que

$$M^1 M^2 = M_2 M'_3.$$

Au contraire, si nous supposions que le point M placé en M^2 est uniquement soumis à l'action de la force F^1, au bout du temps t il serait en L_1. Si nous avions supposé que M n'est plus soumis en M^2 qu'à l'influence de la force F_2, au bout du temps t le mobile serait en L_2. Par les points L^1, L^2 menons des parallèles respectivement aux droites $M^2 O^2$, $M^2 O^1$, soit L^3 le point d'intersection de ces parallèles.

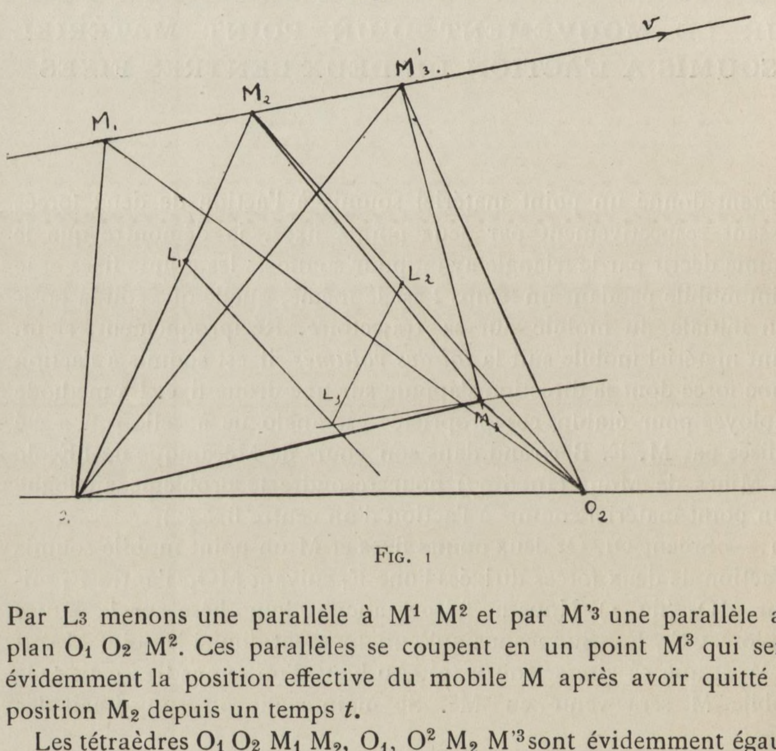


Fig. 1

Par L_3 menons une parallèle à M^1 M^2 et par M'^3 une parallèle au plan O_1 O_2 M^2. Ces parallèles se coupent en un point M^3 qui sera évidemment la position effective du mobile M après avoir quitté la position M_2 depuis un temps t.

Les tétraèdres $O_1 O_2 M_1 M_2$, O_1, O^2 M_2 M'^3sont évidemment égaux comme ayant même base et des hauteurs égales. De même les tétraèdres O_1, O_2 M_2 M'_3, O_1, O_2 M_2 M_3 sont égaux, et par conséquent

$$O_1 O_2 M_1 M_2 = O_1 O_2 M_2 M_3.$$

Cette égalité exprime que le mobile M obéit à une loi des volumes analogue à la loi des aires de Képler dans le mouvement d'une planète.

Si r_1 désigne le vecteur O M, r_2 le vecteur O_2 M, θ un angle dièdre d'arrête $O_1 O_2$, C une constante, la loi des volumes est évidemmemt exprimée par

$$r_1 r_2 \frac{d\theta}{dt} = C.$$

La constante C se déterminera par les conditions initiales du mouvement.

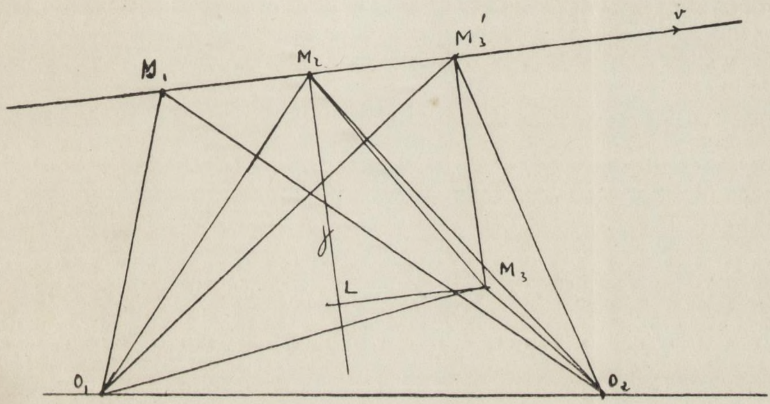


FIG. 2

2. — Supposons, au contraire, qu'un mobile M suive la loi des volumes par rapport à deux points fixes O_1, O^2.

La position initiale du mobile M étant M_1, au bout d'un temps très petit t, le mobile sera venu en M_2 sur la droite portant la vitesse v du mobile en M_1. Si le mobile n'avait pas d'accélération, au bout d'un nouveau temps t, il serait en M'_3. Si au contraire (fig. 2) le mobile M est soumis en M_2 à sa seule accélération γ, au bout du temps t il occupera une position L. La composition des mouvements $M_2 M'_3$, M_2 L nous donnera, d'après le principe de Galilée, la véritable position M_3 du mobile M. Par hypothèse, les tétraèdres $O_1 O_2 M^1 M_2$, $O_1 O_2 M_2 M_3$ sont égaux; par construction, il en est de même des tétraèdres $O_1 O^2 M^1 M_2$, $O_1 O_2 M^2 M'^3$, donc les tétraèdres

$O_1 O_2 M_2 M'_3$, $O_1 O^2 M_2 M_3$ sont égaux et la droite $M_3 M^{3'}$ doit être parallèle au plan $M_2 O_1 O^2$, ou, ce qui revient au même, la direction de l'accélération γ s'appuie sur la droite $O^1 O_2$.

Cela étant, on pourra décomposer l'accélération γ en deux accélérations γ_1, γ_2 dirigées l'une suivant une droite passant par un point quelconque O'_1 de la droite $O^1 O^2$, l'autre suivant une droite passant par un point O'_2 de la droite O^1 O_2 et distant de O'_1 d'une longueur égale à $O_1 O_2$.

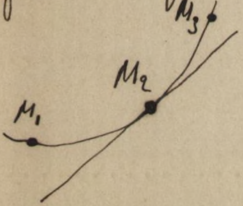
Liége, 18 mars 1910.

1910 T. De Donder (89 R. Mélèzes).

I. (Remarque)

M_1 et M_2 ne sont pas sur la tg^{te} considérée,

moins de négliger les infiniment petits u 2^d ordre par rapport à dt; or, ici, ien ne prouve qu'on peut négliger s infiniment petits du second ordre.

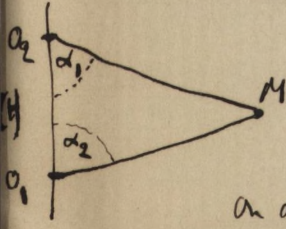


II. (Généralisation)

Le th. des forces-vives donne :

$$C = r_1^2 \sin^2 \alpha_2 \frac{d\theta}{dt}.$$

Soit dV le volume balayé par le triangle $O_1 O_2 M$, pendant dt.



On aura $\frac{dV}{dt} = C\, l(t)$.