KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN
TE AMSTERDAM

LUCIEN GODEAUX.

„Sur un système de coniques de l'espace."

Overgedrukt uit: Verslag van de Gewone Vergadering der Wis- en Natuurkundige Afdeeling van 28 Januari 1911.

(Verschenen 9 Februari 1911).

Wiskunde. — De Heer P. H. Schoute biedt eene mededeeling aan van den Heer Lucien Godeaux te Luik: *„Sur un système de coniques de l'espace"*.

(Mede aangeboden door den Heer D. J. Korteweg).

Dans cette note, j'étudie un système cinq fois infini formé par des coniques de l'espace et qui est lié à six connexes (point-plan) d'ordre un. Ce système de coniques est en correspondance birationnelle avec l'ensemble des éléments de l'espace constitués par une droite et un plan passant par cette droite. La conique qui correspond à l'ensemble d'une droite d et d'un plan π passant par cette droite, est située dans le plan π et une certaine transformation quadratique de ce plan en lui-même lui substitue la droite d. C'est dans la définition de cette correspondance quadratique qu'interviennent les connexes donnés.

1. Soient dans l'espace deux ternes de connexes indépendants et du premier ordre: Φ_1, Φ_2, Φ_3, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3. Les équations de ces connexes sont respectivement

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x,u) &\equiv x_1\,\varphi_{11}(u) + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + x_4\,\varphi_{14}(u) = 0, \\
\varphi_2(x,u) &\equiv x_1\,\varphi_{21}(u) + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + x_4\,\varphi_{24}(u) = 0, \\
\varphi_3(x,u) &\equiv x_1\,\varphi_{31}(u) + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0, \\
\psi_1(x,u) &\equiv x_1\,\psi_{11}(u) + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + x_4\,\psi_{14}(u) = 0, \\
\psi_2(x,u) &= x_1\,\psi_{21}(u) + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad + x_4\,\psi_{24}(u) = 0, \\
\psi_3(x,u) &= x_1\,\psi_{31}(u) + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = 0,
\end{aligned}$$

les coordonnées ponctuelles étant (x_1, x_2, x_3, x_4) et les coordonnées tangentielles (u_1, u_2, u_3, u_4).

Soient m, n les classes respectives des trois premiers et des trois derniers connexes, de sorte que les fonctions $\varphi_{ik}(u)$ sont de degré m et les fonctions $\Psi_{ik}(u)$ de degré n par rapport aux coordonnées (u_1, u_2, u_3, u_4).

Considérons le plan générique

$$u^x = u_1\,x_1 + u_2\,x_2 + u_3\,x_3 + u_4\,x_4 = 0 \qquad (u)$$

Les points qui avec ce plan satisfont à l'équation du connexe Φ_1, forment un plan qui rencontre (u) en une droite α_1. De même, les connexes Φ_2, Φ_3, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 déterminent dans le plan (u) des droites α_2, α_3, β_1, β_2, β_3.

Imaginons une transformation quadratique du plan (u) en lui-même, qui fait correspondre a une droite de ce plan une conique circonscrite au triangle formé par les droites α_1, α_2, α_3. Pour déterminer complètement cette transformation, nous supposerons qu'aux droites $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ correspondent des coniques dégénérées formées respectivement par les droites α_2 et α_3, α_3 et α_1, α_1 et α_2.

Cherchons à former l'équation de la conique ε qui correspond à la droite d représentée par les équations

$$a_x = 0, u_x = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Effectuons sur tout l'espace la transformation (T), birationnelle, définie par

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = u_1 y_1 : u_2 y_2 : u_3 y_3 : y_4 - (u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3) \cdot \quad (T)$$

Le plan $u_x = 0$ devient le plan $y_4 = 0$, et l'équation de la droite α'_1 qui correspond à α_1 s'écrit

$$[\alpha'_1] = y_1(u_4 \varphi_{11} - u_1 \varphi_{14}) + y_2(u_4 \varphi_{12} - u_2 \varphi_{14}) + y_3(u_4 \varphi_{13} - u_3 \varphi_{14}) = 0. \quad (\alpha'_1).$$

Les droites $\alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ se transforment en des droites $\alpha'_2 \alpha'_3 \beta'_1 \beta'_2 \beta'_2$ ayant des équations analogues.

L'équation de la droite d', transformée de d, est

$$y_1 (u_4 a_1 - u_1 a_4) + y_2 (u_4 a_2 - u_2 a_4) + y_3 (u_4 a_3 - u_3 a_4) = 0. \quad (d')$$

La transformation quadratique du plan (u) en lui-même devient une transformation analogue du plan $y_4 = 0$ en lui-même. Une droite

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

est transformée en une conique d'équation

$$(k_{11} b_1 + k_{12} b_2 + k_{13} b_3)[\alpha'_2][\alpha'_3] + \ldots + (k_{31} b_1 + k_{32} b_2 + k_{33} b_3)[\alpha'_1][\alpha'_2] = 0. (1).$$

Les indéterminées k seront éliminées en tenant compte de ce que, si la droite (b) coïncide avec β'_1 ou β'_2 ou β'_3, la conique correspondante représentée par (1) dégénère en α'_2 et α'_3, ou α'_3 et α'_1, ou α'_1 et α'_2. Un calcul simple montre que la conique (ε'), transformée de d', a pour équation :

$$\Delta_{23} [\alpha'_2] [\alpha'_3] + \Delta_{31} [\alpha'_3] [\alpha'_3] + \Delta_{12} [\alpha'_1] [\alpha'_2] = 0 , \quad . \quad (2)$$

où l'on a posé pour abréger

$$\Delta_{23} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{31} = \ldots, \quad \Delta_{12} = \ldots$$

La conique (ε') correspond évidemment à la conique (ε), transformée de d, dans le plan (u) ; les équations de cette conique s'obtiendront donc en opérant sur (2) la transformation (T^{-1})

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = x_1 : x_2 : x_3 : u_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (T^{-1}$$

Tous calculs faits, on trouve

$$\left. \begin{array}{l} \Delta_{23} \psi_2 \psi_3 + \Delta_{31} \psi_3 \psi_1 + \Delta_{12} \psi_1 \psi_2 = 0, \\ u_x = 0 \end{array} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\varepsilon)$$

Nous voyons ainsi qu'à l'ensemble d'un plan et d'une droite de ce plan correspond une conique de ce plan, et inversement, car des équations (ε) on peut passer aux équations

$$u_x = 0, \ a_x = 0.$$

Les coniques ε forment par suite un système quintuplement infini E.

2. A une droite d

$$a_x = 0, b_x = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

correspondent évidemment une infinité simple de coniques de E et ces coniques engendrent une surface F dont nous allons rechercher l'ordre.

Posons

$$u_i = a_i + \lambda b_i \quad , \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Effectuons cette substitution sur la première des équations (ε). En soustrayant la première ligne de la seconde dans les déterminants $\Delta_{23}, \Delta_{31}, \Delta_{12}$, ceux-ci seront du degré $2m$ en λ; par suite on obtiendra une équation de degré $2(m+n)$ en λ. En remplaçant dans cette équation λ par la valeur tirée de

$$a_x + \lambda b_x = 0,$$

on obtiendra l'équation de la surface F.

Remarquons qu'un plan passant par d rencontre F en une seule conique; on a donc le théorème suivant:

Les coniques correspondantes à une droite engendrent une surface d'ordre $2(m+n+1)$ *passant* $2(m+n)$ *fois par cette droite.*

3. Nous allons maintenant rechercher le lieu des droites de l'espace auxquelles correspondent des coniques de F passant par un point fixe P. Ce lieu est visiblement un complexe Π. Comme nous avons pris pour les équations des connexes Φ, Ψ des relations tout à fait générales, il nous suffira pour trouver le degré de Π de chercher le nombre des droites du plan $x_4 = 0$, passant par le point $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, auxquelles correspondent des coniques de E passant par le point P ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$). Cela introduit les hypothèses $u_1 = u_4 = 0, a_1 = 0$ dans les équations (ε) du § 1. Nous pouvons encore supposer sans aucune restriction, que a_4 est nul, car dans les équations (ε) les paramètres a_1, a_2, a_3, a_4 se réduisent à trois paramètres homogènes effectifs.

Pour que les plans

$$u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0, \ a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

se rencontrent en une droite du plan $x_3 = 0$, il faut et il suffit que l'on ait

$$a_2 u_3 - a_3 u_2 = 0 \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Posant $k = \frac{u_2}{u_3}$ et tenant compte de (3), la première équation (ε), où les x représentent les coordonnées du point fixe P, est de degré $2(m+n+1)$ en k et, par suite, le complexe Π est de degré $2(m+n+1)$.

Les droites dont les coniques correspondantes dans E, passent par un point fixe P, forment un complexe Π de degre $2(m+n+1)$.

3. Considérons maintenant un point P et une droite p passant par ce point. Les coniques de E qui passent par P et dont le plan passe par p sont les transformées des droites d'une congruence π contenue dans le complexe Π.

On peut voir immédiatement que la congruence π est du premier ordre. Si l'on veut en effet chercher le nombre de droites de cette congruence passant par un point quelconque Q, on voit que le plan (u) est complètement déterminé par la condition de passer par la droite p et par le point Q. Dans ce plan, les droites auxquelles correspondent des coniques passant par P forment un faisceau, et il y a une seule droite de ce faisceau passant par Q, ce qui démontre notre assertion. On voit aussi que la droite p est singulière pour la congruence π.

Soient $x_1 = x_2 = 0$ les équations de la droite $p, x_1 = x_2 = x_3 = 0$ les coordonées du point P. Posons $k = \frac{u_2}{u_1}$ et écrivons les équations d'une conique de E passant par P et dont le plan contient p ; soient

$$f(k, a) = 0, x_1 + kx_2 = 0,$$

les équations obtenues. L'équation $f = 0$, provenant de la première des équations (ε) du § 1, est de degré $2(m+n)+1$ en k et linéaire en (a_1, a_2, a_3, a_4).

Supposons $x_2 = 0$ et introduisons encore l'hypothèse $a_1 = 0$ dans l'équation $f = 0$. Le centre du faisceau formé par les droites du plan

$$x_1 + kx_2 = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4)$$

($k \gtrless 0$) auxquelles correspondent des coniques passant par P, est défini par l'équation (4) et les équations

$$b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0, \quad c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0,$$

moyennant

$$f(k, b) = 0, f(k, c) = 0.$$

On en conclut que la seconde ligne singulière de π est une courbe d'ordre $4(m+n+1)+1$ s'appuyant évidemment $4(m+n+1)$ fois sur la droite p (Cette courbe sera définie dans le voisinage de $x_2 = 0$ par continuité).

Le lieu des droites auxquelles correspondent des coniques de E passant par un point P et dont les plans passent par une droite p issue de P, est une congruence π d'ordre un et de classe $4(m+n+1)+1$, *dont la droite p et une courbe d'ordre* $4(m+n+1)+1$ *sont les lignes singulières.*

On remarquera encore que deux droites du complexe Π, n'appartennant pas à un même faisceau de rayons dont le plan passe par P, appartiennent à une et à une seule congruence π, donc :

Le complexe Π possède un réseau de congruences π.

5. Il peut arriver que la droite que nous avons désigné par α_1 (§ 1) cesse, pour des positions particulières du plan (u), d'être définie d'une manière univoque ; cela a lieu pour les plans (u) satisfaisant aux équations

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_{11}(u) & \varphi_{12}(u) & \varphi_{13}(u) & \varphi_{14}(u) \\ u_1 & u_3 & u_2 & u_4 \end{matrix} \right\| = 0. \quad . \quad . \quad (5)$$

Alors en effet le plan défini par le connexe Φ_1 coïncide avec le plan (u), et on peut prendre toute droite de ce plan pour la droite α_1. La transformation quadratique du plan (u) en lui-même présente dans ce cas deux degrés d'indétermination, et l'on peut dire que : *A toute droite d'un plan u, donné par les équations* (5), *correspondent* ∞^2 *coniques du plan.*

Les équations (5) sont vérifiées par m^3+m^2+m+1 plans. Répétant le même raisonnement pour les connexes Φ_2, Φ_3, on voit que :

Il existe $3(m+1)(m^2+1)$ *plans tels qu'à toute droite de ce plan corresponde une double infinité de coniques de ce plan.*

Tout plan de l'espace contient généralement un réseau de coniques de E ; si ce plan vérifie les équations

$$\left\| \begin{matrix} \psi_{i1}(u) & \psi_{i2}(u) & \psi_{i3}(u) & \psi_{i4}(u) \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{matrix} \right\| = 0, \ (i=1,2,3), \quad . \quad (6)$$

On voit que chacune des coniques qu'il contient peut être considérée comme correspondant à une droite arbitraire de ce plan, donc :

Il existe $3(n+1)(n^2+1)$ *plans tels qu'à toute droite de ce plan correspondent les coniques d'un réseau de ce plan, ce réseau étant le même pour toutes les droites d'un des plans.*

Tout plan satisfaisant soit aux équations (5) ou à leurs analogues relatives à Φ_2, Φ_3, soit aux équations (6), est évidemment principal pour tout complexe Π relatif à un point P de ce plan.

Morlanwelz, décembre 1910.