Bulletin de la Classe des sciences

Une involution régulière appartenant à une surface irrégulière

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'une involution régulière appartenant à la surface représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe algébrique non rationnelle, contenant une involution rationnelle.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Une involution régulière appartenant à une surface irrégulière,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction d'une involution régulière appartenant à la surface représentant les couples de points non ordonnés d'une courbe algébrique non rationnelle, contenant une involution rationnelle.

On connait depuis longtemps des involutions régulières appartenant à des surfaces irrégulières : La surface de Kümmer, de genres $p_a = P_4 = 1$, représente une involution du second ordre appartenant à la surface de Jacobi ($p_a = -1$, $p_g = P_4 = 1$). L'exemple que nous exposons dans cette note est obtenu de la manière suivante : Nous considérons une courbe plane L d'ordre premier p supérieur à trois, contenant une involution cyclique rationnelle d'ordre p. Sur la surface F qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L nous avons une involution cyclique d'ordre p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Nous démontrons que cette involution est régulière.

Nous avons à diverses reprises considéré les involutions appartenant à la surface des couples de points non ordonnés d'une courbe contenant elle-même une involution cyclique (1). Signa-

(1) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.* Actualités Scientifiques, N° 270 (Paris, Hermann, 1935), *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1952), *Construction de surfaces algébriques irrégulières* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1950, pp. 14-22), *Involutions irrégulières appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique* (Idem., 1950, pp. 102-112), *Sur la structure des points unis d'une involution appartenant à la surface des couples de points d'une courbe algébrique* (Idem, 1950, pp. 383-387).

lons ce théorème, que nous ne démontrons ici que dans le cas particulier qui nous intéresse. Si une courbe L contient une involution cyclique γ_p, la surface F qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L contient une involution cyclique d'ordre p dont la surface image a l'irrégularité égale au genre de l'involution γ_p. La démonstration de ce théorème dans le cas général se trouve dans une communication qui sera faite au *Convegno di Geometria algebrica* de Turin dans quelques jours [1].

1. Soit L la courbe algébrique d'équation

$$x_3^p + \varphi_p(x_1, x_2) = 0,$$

où p est un nombre premier supérieur à trois et $\varphi_p(x_1, x_2)$ une forme algébrique de degré p en x_1, x_2. La courbe L est transformée en soi par l'homologie τ de période p,

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : x_2 : \epsilon x_3,$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité. Cette homologie engendre sur la courbe L une involution rationnelle γ_p d'ordre p possédant p points unis sur la droite $x_3 = 0$.

La courbe L est de genre $\pi = \frac{1}{2}(p - 1)(p - 2)$. Commençons par considérer la courbe canonique d'ordre $2\pi - 2$ située dans un espace $S_{\pi-1}$ à $\pi - 1$ dimensions, courbe que nous continuerons à désigner par L. A cet effet, rapportons projectivement aux hyperplans de $S_{\pi-1}$ les adjointes d'ordre $p - 3$ à la courbe plane L, c'est-à-dire les courbes

$$x_3^{p-3}\psi_0 + x_3^{p-4}\psi_1(x_1, x_2) + \dots + \psi_{p-3}(x_1, x_2) = 0, \qquad (1)$$

où les ψ sont des formes algébriques en x_1, x_2 dont le degré est indiqué par l'indice.

A l'homologie τ correspond sur la courbe canonique L une transformation birationnelle induite par une homographie de $S_{\pi-1}$ que nous continuerons à désigner par τ.

Nous poserons $\rho X_{ijk} = x_1^i x_2^j x_3^k$ et nous indiquerons par 0_{ijk}

[1] *Costruzione di superficie algebriche irregolari* (paraîtra dans les RENDICONTI DEL SEMINARIO MATEMATICO DI TORINO).

le point de $S_{\pi-1}$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf X_{ijk}.

En examinant l'équation des adjointes, on voit que l'homographie τ de $S_{\pi-1}$ possède $p-2$ axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-3}$, l'indice indiquant la dimension. Aux points unis de τ correspondent sur la courbe canonique L les points de rencontre de cette courbe avec l'axe σ_{p-3}.

Supposons qu'un des points unis de γ_p sur la courbe plane L soit le point $x_2 = x_3 = 0$, c'est-à-dire supposons que dans φ_{p-3} le terme en x_1^p manque. A ce point correspond dans $S_{\pi-1}$ le point $0_{p-3,0,0}$. Les hyperplans de $S_{\pi-1}$ passant par la tangente à la courbe canonique L au point $0_{p-3,0,0}$ correspondent aux adjointes (1) passant par $0_1(x_2 = x_3 = 0)$ et y touchant la courbe plane L, c'est-à-dire la droite $x_2 = 0$. Ces adjointes sont caractérisées par le manque du terme en x_1^{p-3} dans ψ_{p-3} et du terme en x_1^{p-4} dans ψ_{p-4}. On en conclut que la tangente à la courbe L dans $S_{\pi-1}$ passe par le point $0_{p-4,0,1}$. Ce point appartient à l'espace σ_{p-4}.

Ce résultat est également valable pour les autres points unis de γ_p et par suite : *Les points unis de l'involution γ_p sur la courbe* L *de* $S_{\pi-1}$ *appartiennent à l'espace* σ_{p-3} *et les tangentes à la courbe* L *en ces points s'appuient sur* l'*espace* σ_{p-4}.

2. Désignons par F la surface qui représente les couples de points non ordonnés de la courbe L. On sait que cette surface a les genres

$$p_g = \frac{1}{2}\pi(\pi-1),$$

$$p_a = \frac{1}{2}\pi(\pi-1)-\pi, \quad p^{(1)} = (\pi-1)(4\pi-9)+1.$$

Aux couples de points de L contenant un point fixe correspondent sur F les points d'une courbe H, de genre π. Cette courbe appartient à un système continu $\{H\}$ de degré un et d'indice deux. L'enveloppe du système $\{H\}$ est la courbe K qui représente les couples de points de L formés de deux points coïncidents.

Soient P un point de F, P_1, P_2 les points de L qu'il représente.

A P_1, P_2, fait correspondre deux points P'_1, P'_2 représentés par un point P' de F. On en conclut qu'à τ correspond une transformation birationnelle cyclique T de F en soi, engendrant une involution I d'ordre p.

Les points unis de l'involution I sont :

1) Les p points $0_1, 0_2, \ldots, 0_p$ de la courbe K qui correspondent aux p points unis de τ sur L,

2) Les $\frac{1}{2}p(p-1)$ points $0_{12}, 0_{13}, \ldots, 0_{p-1,p}$ qui représentent les couples de points unis distincts de τ sur L.

Si l'on désigne par $H_1, H_2, \ldots, H_p$ les courbes H touchant K aux points $0_1, 0_2, \ldots, 0_p$, les points 0_{ik} sont les intersections de ces courbes deux à deux. D'une manière précise, le point 0_{ik} est l'intersection des courbes H_i, H_k.

Nous avons démontré que chacun des points de la première catégorie possède dans son domaine du premier ordre un point uni de première espèce. Ce point appartient à la courbe K. Quant aux points unis de la seconde catégorie, nous avons démontré que ce sont des points unis de première espèce.

Entre le genre arithmétique p_a de F et celui p'_a de la surface F' image de l'involution I, nous avons la relation

$$12(p_a+1) = 12p(p'_a+1) + \frac{1}{2}p(p-1)^2(p-5) + \frac{1}{2}p(p-1)(p-11).$$

Nous avons

$$p_a + 1 = \frac{1}{8}p(p-3)(p^2-3p-2),$$

d'où l'on tire

$$p'_a = \frac{1}{12}(p-1)(p-2)(p-3).$$

3. Considérons sur la surface F' un système linéaire régulier $|G'|$ et soit $|G|$ le système linéaire complet de courbes de F qui comprend les transformées des courbes G'.

A une courbe G correspond sur la courbe L une correspondance symétrique θ entre les points de cette courbe. A la correspondance θ correspond sur une droite L′ représentant les groupes de γ_p, une correspondance θ' entre les points de cette droite. Enfin, à la correspondance θ' correspond sur une quadrique Q représentant les couples de points de la droite L′, une courbe Γ.

Lorsque la courbe G varie dans $|G|$, on obtient sur L une famille de correspondances θ et sur L′ une famille de correspondances θ', enfin sur la quadrique Q une famille de courbes Γ certainement comprise dans un système linéaire $|\Gamma|$.

On voit ainsi qu'à un système linéaire régulier sur F′ correspond un système linéaire $|\Gamma|$ sur la quadrique Q.

Si la surface F′ était irrégulière et précisément d'irrégularité ρ, le système régulier $|G'|$ appartiendrait à un système continu $\{G'\}$ formé de ∞^ρ systèmes linéaires. On aurait alors sur la quadrique Q une famille ∞^ρ de systèmes linéaires non équivalents, ce qui est impossible, donc *La surface F′ est régulière.* Son genre géométrique est

$$p'_g = p'_a = \frac{1}{12}(p-1)(p-2)(p-3).$$

4. Nous allons maintenant établir la relation entre les genres arithmétiques p_a et p'_a de F et F′ utilisée plus haut.

Supposons que nous prenions pour modèle projectif de la surface F′ une surface normale sur laquelle les points de diramation sont isolés. Rappelons qu'aux points $0'_i$ correspondent sur F′ des points de diramation multiple d'ordre $\nu+1$, où $p = 2\nu+1$, le cône tangent en un de ces points se décomposant en un cône rationnel d'ordre ν et en un plan ne rencontrant le cône qu'en une seule génératrice. Aux points 0_{jk} correspondent des points multiples d'ordre p à cône tangent rationnel.

Appelons C′ les sections hyperplanes de F′ et C les courbes qui leur correspondent sur F. Les courbes C passant par un point 0_{ik} y acquièrent un point multiple d'ordre p à tangentes variables et celles qui passent par un point 0_i y acquièrent un point multiple d'ordre $\nu+1$ auquel sont infiniment voisins un point $0'_i$ multiple d'ordre ν et une suite de ν points simples (dans une autre direction).

Si n est l'ordre de F′ et ρ le genre des courbes C′, le degré des courbes C est pn et leur genre $p(\rho - 1) + 1$.

Considérons un faisceau de courbes C′ et le faisceau des courbes C correspondantes. Nous les désignerons par $|C'|$ et $|C|$.

Pour calculer l'invariant J de Zeuthen-Segre de F, prenons sur cette surface un second faisceau $|D|$ et considérons la courbe lieu des contacts des courbes de $|C|$ et de $|D|$. Soit R cette courbe.

En un point 0_i, la courbe R passe ν fois par 0_i, $\nu - 1$ fois par $0'_i$ et 0_i est l'origine d'une branche linéaire ne passant pas par $0'_i$. Il en résulte que le point 0_i compte pour $2\nu(\nu - 1) + \nu = 2\nu^2 - \nu$ points dans le nombre des points qui sont doubles pour une courbe C de $|C|$. D'autre part, on sait que un point 0_{ik} compte pour $(p - 1)^2$ dans le même nombre.

Cela étant, si l'on désigne par δ la classe de la surface F′, l'invariant de Zeuthen-Segre J′ de cette surface est

$$J' = \delta + \frac{1}{2} p^2(p - 1) + p(\nu + 2) - n - 4\pi$$

et celui J de la surface F est

$$J = p\delta + \frac{1}{2} p(p - 1)^3 + p(2\nu^2 - \nu) - pn - 4p(\pi - 1) - 4.$$

On en déduit

$$J + 4 = p(J' + 4) - \frac{1}{2} p(p - 1)(2p - 1) - p(6\nu + 2),$$

c'est-à-dire

$$J + 4 = p(J' + 4) - \frac{1}{2} p(p - 1)(2p - 1) - p(3p - 1).$$

On sait que les courbes canoniques de la surface F passent $p - 2$ fois par les points 0_{ik} et $\nu - 1$ par les points 0_i, $0'_i$. Si $p^{(1)}$ est le genre linéaire de F et $p'^{(1)}$ celui de F′, on a donc

$$p^{(1)} - 1 = p(p'^{(1)} - 1) + \frac{1}{2} p(p - 1)(p - 2)^2 + 2p(\nu - 1)^2,$$

c'est-à-dire

$$p^{(1)} - 1 = p(p'^{(1)} - 1) + \frac{1}{2} p(p - 1)(p - 2)^2 + \frac{1}{2} p(p - 3)^2.$$

En utilisant la formule de Noether,

$$p^{(1)} + \mathrm{J} = 12p_a + 9,$$

on a donc

$$12(p_a + 1) = 12p(p'_a + 1) + \frac{1}{2}p(p-1)^2(p-5)$$
$$+ \frac{1}{2}p(p-1)(p-11),$$

relation utilisée plus haut.

Remarquons que si l'on a sur une surface F une involution possédant α points unis de première espèce et β points unis de la même espèce que les points 0_i, la relation s'écrit

$$12(p_a + 1) = 12p(p'_a + 1) + \alpha(p-1)(p-5)$$
$$+ \frac{1}{2}\beta(p-1)(p-11). \tag{1}$$

5. On peut obtenir la formule (1) par une voie détournée.

Considérons sur une surface F une involution cyclique I d'ordre premier p ayant un nombre fini de points unis. Dans le faisceau des tangentes à F en un point uni de seconde espèce, la transformation T de F en soi génératrice de l'involution I donne une homographie de la forme

$$\lambda' : \mu' = \lambda : \epsilon^a \mu,$$

ϵ étant une racine primitive d'ordre p de l'unité. La connaissance de α suffit pour déterminer la structure du point uni et celle du point de diramation correspondant sur la surface F' image de l'involution. Appelons N_α l'influence du point uni considéré dans la formule liant les genres arithmétiques p_a de F et p'_a de F' ; appelons N l'influence dans la même formule d'un point uni de première espèce.

Si l'involution I possède t points unis de première espèce et t_α points unis de seconde espèce correspondant à la valeur de α, on a

$$12(p_a + 1) = 12p(p'_a + 1) + t\mathrm{N} + \Sigma\, t_\alpha \mathrm{N}_\alpha, \quad (\alpha = 2, 3, \ldots, p-1).$$

On sait que

$$N = (p-1)(p-5), \quad N_{p-1} = -(p^2-1).$$

Appliquons cette relation au cas où I est l'involution plane engendrée par l'homographie

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon^2 x_3.$$

L'involution I possède trois points unis :

1) Le point (1, 0, 0) qui correspond à la valeur $\alpha = 2$;

2) Le point (0, 1, 0) qui correspond à la valeur $\alpha = p-1$, car les équations de l'homographie peuvent s'écrire

$$x_1' : x_2' : x_3' = \epsilon^{p-1} x_1 : x_2 : \epsilon x_3$$

3) Le point (0, 0, 1) qui correspond à la valeur $\alpha = 2$, car les équations de l'homographie peuvent décrire

$$x_1' : x_2' : x_3' = \eta^2 x_1 : \eta x_2 : x_3,$$

en posant $\eta = \epsilon^{p-1}$.

Actuellement, les surfaces F, F' étant rationnelles, on $p_a = 0$, $p_a' = 0$ et par suite

$$12 = 12p - (p^2-1) + 2N_2,$$

d'où

$$N_2 = \frac{1}{2}(p-1)(p-11).$$

On en déduit la relation (1).

Liège, le 17 mai 1961.