Bulletin de la Classe des sciences

Une famille d'involutions rationnelles appartenant à des surfaces algébriques

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'involutions rationnelles, cycliques, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à des surfaces algébriques de genres supérieurs à zéro.

COMMUNICATIONS D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Une famille d'involutions rationnelles appartenant à des surfaces algébriques,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction d'involutions rationnelles, cycliques, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, apparetenant à des surfaces algébriques de genres supérieurs à zéro.

Dans deux notes publiées voici quelques années (1), nous avons considéré l'involution d'ordre $p = \nu^2 + 1$ appartenant à la surface F d'équation

$$a_1 x_1^\nu x_2 + a_2 x_2^\nu x_3 + a_3 x_3^\nu x_4 + a_4 x_4^\nu x_1 = 0$$

et engendrée par l'homographie

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon^{\nu^2-\nu+2} x_3 & \epsilon^{\nu^2-\nu+1} x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité, dans les cas $\nu = 4$ et $\nu = 6$. Cette involution I possède alors quatre points unis et est d'ordre premier. Elle est rationnelle alors que la surface F a les genres $P_a = p_g = 4$ si $\nu = 4$ et $p_a = p_g = 20$ si $\nu = 6$. Notre but était de montrer l'existence de telles involutions.

---

(1) *Sur quelques involutions rationnelles appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1952, pp. 244-252, 426-436).

Précisément, nous montrions que les systèmes canonique et bicanonique ne pouvaient exister sur la surface F′ image de l'involution et comme cette surface était, comme F, régulière, on avait $p_a = P_2 = 0$, d'où la rationnalité d'après le théorème de Castelnuovo. C'était en outre une application de la théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Nous allons étendre ces conclusions à des cas plus généraux par une méthode plus simple, en montrant qu'il existe sur la surface F′ un faisceau linéaire de courbes rationnelles.

1. Observons tout d'abord que pour que l'involution I ne possède qu'un nombre fini de points unis, ν doit être pair. Supposons en effet que ν soit impair et égal à $2\nu' + 1$. On a

$$p = 2(2\nu'^2 + 2\nu' + 1)$$

et l'homographie $H^{2\nu'^2+2\nu'+1}$ est une homographie biaxiale harmonique d'axes $x_1 = x_3 = 0$, $x_2 = x_4 = 0$, droites qui appartiennent à la surface F (quel que soit d'ailleurs ν).

Supposons donc ν pair et posons $\nu = 2\nu'$ d'où $p = 4\nu'^2 + 1$. Aucune confusion n'étant possible, nous écrirons $p = 4\nu + 1$.

L'homographie H s'écrit

$$H = (x_1,\ \epsilon x_2,\ \epsilon^{4\nu^2-2\nu-2} x_3,\ \epsilon^{4\nu^2-2\nu+1} x_4).$$

L'involution I possède quatre points unis : les sommets 0_1, 0_2, 0_3, 0_4 du tétraèdre de référence.

La droite $0_1 0_2$ rencontre la surface F, dont l'équation s'écrit maintenant

$$a_1 x_1^{2\nu} x_2 + a_2 x_2^{2\nu} x_3 + a_3 x_3^{2\nu} x_4 + a_4 x_4^{2\nu} x_1 = 0,$$

aux points 0_1, 0_2 et la surface a un contact d'ordre $2\nu - 1$ avec cette droite au point 0_2.

De même, la surface F a un contact d'ordre $2\nu - 1$ avec la droite $0_1 0_4$ au point 0_1, avec la droite $0_2 0_3$ au point 0_3 et avec la droite $0_3 0_4$ au point 0_4.

2. Observons que les quadriques du faisceau

$$x_1 x_3 + \lambda x_2 x_4 = 0 \tag{1}$$

sont transformées en elles-mêmes par H. Elles découpent donc sur F un faisceau de courbes $|K|$ dont chaque courbe est transformée en soi par H.

Les quadriques (1) passent par les arêtes du quadrilatère gauche $O_1O_2O_3O_4O_1$ et par conséquent les courbes K ont un contact d'ordre $2\nu - 1$ avec O_1O_4 en O_1, avec O_2O_1 en O_2, avec O_3O_2 en O_3 et avec O_4O_3 en O_4. Sur une courbe K, l'homographie H détermine donc une involution d'ordre p ayant quatre points unis.

Le genre d'une courbe K est égal à $4\nu^2$. Désignons par K' la courbe qui correspond à une courbe K sur la surface F' et par x son genre. La formule de Zeuthen donne

$$2(4\nu^2 + 1)(x - 1) + 4 \, . \, 4\nu^2 = 2(4\nu^2 - 1)$$

d'où $x = 0$.

La surface F' contient donc un faisceau linéaire $|K'|$ de courbes rationnelles et est donc rationnelle.

L'involution cyclique d'ordre $\mathrm{p} = 4\nu^2 + 1$, *n'ayant que quatre points unis, appartenant à la surface d'équation*

$$a_1x_1^{2\nu}x_3 + a_2x_2^{2\nu}x_3 + a_3x_3^{2\nu}x_4 + a_4x_4^{2\nu}x_1 = 0$$

de genres $\mathrm{p}_a = \mathrm{p}_g = \binom{2\nu}{3}$, *est rationnelle.*

3. Observons en passant que si ν est impair et égal à $2\nu' + 1$, on peut considérer sur F l'involution d'ordre $p = 2\nu'^2 + 2\nu' + 1$ engendrée par l'homographie H^2.

En écrivant ν au lieu de ν' et en posant $\eta = \epsilon^2$, on a

$$H' = H^2 = (x_1, \, \eta x_2, \, \eta^{2\nu^2+1}x_3, \, \eta^{2\nu^2}x_4)$$

et cette homographie engendre sur F une involution d'ordre $p' = 2\nu^2 + 2\nu + 1$ n'ayant comme points unis que les sommets O_1, O_2, O_3, O_4 du tétraèdre de référence.

Les quadriques (1) sont encore transformées en elles-mêmes par H' et on a sur F un faisceau de courbes $|K|$ transformées en soi par H' et ayant des contacts d'ordre 2ν avec O_1O_4 en O_1, avec O_2O_1 en O_2, avec O_3O_2 en O_3, avec O_4O_3 en O_4. Les courbes K sont de genre $(2\nu + 1)^2$.

La formule de Zeuthen donne actuellement pour le genre x des courbes K' homologues des courbes K sur F',

$$2(2\nu^2 + 2\nu + 1)(x - 1) + 4(2\nu^2 + 2\nu) = 2(4\nu^2 + 4\nu),$$

d'où $x = 1$.

La surface F' contient actuellement un faisceau linéaire $|K'|$ de courbes elliptiques.

Liège, le 26 juin 1961.