Bulletin de la Classe des sciences

Sur une surface liée à une suite de Laplace terminée dans les deux sens

Lucien Godeaux

Résumé
Étude d'une surface associée à une suite de Laplace de l'espace à cinq dimensions terminée dans les deux sens en présentant chaque fois le cas de Laplace. Construction d'une congruence W associée à cette surface.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur une surface liée à une suite de Laplace terminée dans les deux sens,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Étude d'une surface associée à une suite de Laplace de l'espace à cinq dimensions terminée dans les deux sens en présentant chaque fois le cas de Laplace. Construction d'une congruence W associée à cette surface.

A une surface (x) rapportée à ses asymptotiques u, v, nous avons associé dans l'espace S_5 à cinq dimensions une suite de Laplace ..., U_n, ..., U_1, U, V, V_1, ..., V_n, ... dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u et du suivant dans le sens des v. Dans un travail récent [1], nous avons considéré le cas où la suite de Laplace s'arrête au point U_n en présentant le cas de Laplace et par conséquent au point V_{n-2} en présentant le cas de Goursat. Dans cette note, nous posons comme condition que la suite s'arrête sans les deux sens en présentant chaque fois le cas de Laplace. On sait que si la suite s'arrête dans ce cas au point U_n dans le sens des v, elle s'arrête au point V_n dans le sens des u. Dans ce cas, une congruence W est associée à la surface (x). Nous donnons la construction de cette congruence et déterminons les foyers de ses rayons [2].

(1) *Quelques propriétés d'une surface associée à une suite de Laplace terminée* (Annali di Matematica, 1961 (IV), t. LIII, pp. 9-20). Voir aussi *Sulle superficie associate ad una successione di Laplace chiusa* (Bollettino dell' Unione Matematica italiana, 1960, pp. 159-161), résumé d'une conférence faite à l'Institut de Géométrie supérieure « Luigi Cremona » de l'Université de Bologne, le 30 mai 1960.

(2) Ce travail a fait l'objet d'une communication au *Simposio di Geometria differenziale di Syracusa,* à l'occasion des *Celebrazioni Archimedee del secolo XX,* en avril 1961.

Nous utilisons les notations et les résultats de notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé* [1] sans définir à nouveau ces notations, pour ne pas allonger cette note. Nous les avons d'ailleurs utilisées constamment dans les travaux de géométrie projective différentielle publiés par l'Académie.

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. Désignons par U, V les points de l'hyperquadrique Q de Klein, de S_5, représentant les tangentes aux asymptotiques u, v de (x) en un point x. On sait que U, V sont transformés de Laplace l'un de l'autre et appartiennent à une suite de Laplace

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots \tag{L}$$

chaque point étant le transformé du précédent dans le sens des u et du suivant dans le sens des v. La suite L est autopolaire par rapport à l'hyperquadrique Q.

Nous supposerons que la suite L se termine dans les deux sens en présentant le cas de Laplace. Si U_n est le dernier point de la suite dans le sens des v, le dernier point de la suite dans le sens des u est V_n. On a

$$h_n = 0, \quad k_n = 0.$$

Le point U_n ne dépend que de v et le point V_n que de u. Lorsque v varie, le point U_n décrit une courbe (U_n) appartenant au plan $\xi = U_n U_n^{01} U_n^{02}$ et lorsque u varie, le point V_n décrit une courbe (V_n) appartenant au plan $\eta = V_n V_n^{10} V_n^{10}$.

Les plans ξ, η sont conjugués par rapport à l'hyperquadrique Q et coupent celle-ci suivant deux coniques γ_ξ, γ_η qui représentent les droites de deux demi-quadriques ayant même support Φ_n.

Lorsque u varie, le plan ξ reste fixe, donc également son conjugué η. De même, lorsque v varie, le plan η reste fixe et également son conjugué ξ. Il en résulte que la quadrique Φ_n reste fixe lorsque u, v varient.

2. La droite $V_n V_n^{10}$ est conjuguée à l'espace à trois dimensions $U_{n-1} U_n U_n^{01} U_n^{02}$ osculateur au point U_{n-1} à la courbe v tracée sur la surface (U_{n-1}). Lorsque v varie, la droite $V_n V_n^{10}$

[1] Actualités scient., N° 138 (Paris, Hermann, 1934). Rappelons que nous écrivons φ^{ik} pour $\dfrac{\partial^{i+k}\varphi}{\partial u^i \partial v^k}$.

et son espace conjugué restent fixes tandis que le point U_{n-1} décrit la courbe v tracée sur (U_{n-1}). Cette courbe appartient donc à l'espace à trois dimensions conjugué de $V_n V_n^{10}$; cet espace contient le plan ξ. Donc, les courbes v tracées sur la surface (U_{n-1}) appartiennent à des espaces à trois dimensions passant par le plan ξ.

De même, les courbes u tracées sur la surface (V_{n-1}) appartiennent à des espaces à trois dimensions qui passent par le plan η.

L'hyperplan polaire du point V_n est l'espace à quatre dimensions $U_{n-2}U_{n-1}U_nU_n^{01}U_n^{02}$ osculateur en U_{n-2} à la courbe v tracée sur la surface (U_{n-2}). Lorsque v varie, le point V_n et son hyperplan polaire restent fixes, tandis que le point U_{n-2} décrit la courbe v tracées sur la surface (U_{n-2}). Donc les courbes v tracées sur la surface (U_{n-2}) appartiennent à des espaces à quatre dimensions passant par le plan ξ.

De même, les courbes u tracées sur la surface (V_{n-2}) appartiennent à des espaces à quatre dimensions passant par le plan η.

3. Désignons par G un des points d'intersection de la droite U_nV_n avec Q.

Sur la surface (G), les courbes u sont découpées par les cônes projetant des points U_n la courbe (V_n) et les courbes v, par les cônes projetant des points V_n la courbe (U_n).

La tangente en un point G à la courbe u tracée sur la surface (G) appartient au plan tangent au cône projetant la courbe (V_n) de U_n, c'est-à-dire au plan $U_nV_nV_n^{10}$. Cette tangente coupe donc la droite $V_nV_n^{10}$ en un point G_η.

L'hyperplan polaire du point G_η passe par G et par le plan ξ, donc par U_n et par V_n. Il en résulte qu'il passe aussi par l'espace à trois dimensions $U_{n-1}U_nU_n^{01}U_n^{02}$ conjugué de la droite $V_nV_n^{10}$. Quand v varie, l'hyperplan polaire de G_η reste fixe et il en est de même de G_η.

De même, la tangente au point G à la courbe v tracée sur la surface (G) coupe la droite $U_nU_n^{01}$ en un point G_ξ qui reste fixe quand u varie.

4. Représentons par $\Omega(p, q) = 0$ la condition pour que deux points p, q soient conjugués par rapport à Q, de telle sorte que l'équation de cette hyperquadrique soit $\Omega(p, p) = 0$.

Posons

$$G = \lambda U_n + \mu V_n,$$

d'où

$$G^{01} = \lambda^{01} U_n + \mu^{01} V_n + \lambda U_n^{01}.$$

Si nous représentons par

$$\xi_0 V_n + \eta_0 U_n + \eta_1 U_n^{01}$$

un point du plan $V_n U_n U_n^{01}$. ξ_0, η_0, η_1 étant les coordonnées de ce point, l'équation de la droite GG_ξ est

$$\begin{vmatrix} \xi_0 & \eta_0 & \eta_1 \\ \mu & \lambda & 0 \\ \mu^{01} & \lambda^{01} & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Le point G_ξ est donc donné par

$$(\mu\lambda^{01} - \lambda\mu^{01}) U_n + \lambda\mu U_n^{01}.$$

On peut obtenir une autre expression de ce point de la manière suivante :

Puisque on a $\Omega(U_n, V_n) = 0$, on peut écrire

$$\Omega(G, V_n) = \mu\Omega(V_n, V_n), \; \Omega(G^{01}, V_n) = \mu^{01}\Omega(V_n, V_n),$$

c'est-à-dire

$$\Omega(\mu^{01}G - \mu G^{01}, \; V_n) = 0.$$

Nous pouvons donc poser

$$G_\xi = \mu^{01}G - \mu G^{01}.$$

On obtient de même

$$G_\eta = \lambda^{10}G - \lambda G^{10}.$$

On a $G_\xi^{10} = 0$, $G_\eta^{01} = 0$, donc

$$\mu G^{11} - \mu^{01}G^{10} + \mu^{10}G^{01} - \mu^{11}G = 0,$$

$$\lambda G^{11} + \lambda^{01}G^{10} - \lambda^{10}G^{01} - \lambda^{11}G = 0.$$

Ces équations doivent être identiques, donc on doit avoir

$$\frac{\mu}{\lambda} = -\frac{\mu^{01}}{\lambda^{01}} = -\frac{\mu^{10}}{\lambda^{10}} = \frac{\mu^{11}}{\lambda^{11}}.$$

On en déduit

$$(\log \lambda\mu)^{10} = 0,\ (\log \lambda\mu)^{01} = 0,\ \lambda\mu = \theta,$$

θ étant une constante, et ensuite

$$\mu\mu^{11} - \mu^{10}\mu^{01} = 0,\ (\log \mu)^{11} = 0,\ \mu = \varphi_1(u)\varphi_2(v),$$

où $\varphi_1(u)$ est une fonction de u seul et $\varphi_2(v)$ une fonction de v seul.

On peut effectuer une substitution sur la variable u et une substitution sur la variable v de manière à avoir $\varphi_1(u) = 1$ et $\varphi_2(v) = 1$, d'où $\mu = 1$ et $\lambda = \theta$,

$$G = \theta U_n + V_n.$$

Le point G satisfait donc aux relations

$$G^{11} = 0,\ G^{10} = V_n^{10} = G_\eta,\ G^{01} = \theta U_n^{01} = \theta G_\xi.$$

La droite g dont G est l'image sur Q engendre donc une congruence W.

5. La droite U_nV_n coupe Q en deux points

$$G_1 = \theta U_n + V_n,\ \ G_2 = \theta U_n - V_n$$

et nous avons

$$G_1^{01} = G_2^{01} = \theta U_n^{01},\ G_1^{10} = -G_2^{10} = V_n^{10}.$$

Considérons l'espace à trois dimensions $U_n\eta$, qui ne dépend que de v. La droite conjuguée de cet espace par rapport à Q appartient au plan ξ et à l'hyperplan polaire de U_n. Elle coïncide donc avec la droite polaire de U_n par rapport à la conique γ_ξ. Soient R_1, R_2 les points de rencontre de cette polaire avec la conique. Ces points représentent deux génératrices rectilignes r_1, r_2 de la quadrique Φ_n. Les droites de la congruence Σ_1 de directrices r_1, r_2 sont représentées par les points de Q situés dans l'espace $U_n\eta$. Cet espace coupe les surfaces (G_1), (G_2) suivant des courbes u et à ces courbes correspondent des réglées R_u, R'_u de la congruence Σ_1. Les couples de droites r_1, r_2 dépendent de v.

Désignons par S_1, S_2 les points d'intersection de la conique γ_η avec la polaire du point V_n par rapport à cette conique et par s_1, s_2 les génératrices rectilignes de la quadrique Φ_n qui leur correspondent. Ces droites n'appartiennent pas au même mode que r_1, r_2. La considération de l'espace $V_n\xi$, qui ne dépend que de u, et de la congruence Σ_2 de directrices s_1, s_2 qui lui correspond, conduit à des réglées R_v, R'_v de Σ_2 représentant les courbes v des surfaces (G_1), (G_2). Le couple de droites s_1, s_2 ne dépend que de u.

Soient g_1, g_2 les droites qui correspondent aux points G_1, G_2.

La droite g_1 appartient aux réglées R_u, R'_v, donc elle s'appuie sur les droites r_1, r_2, s_1, s_2, c'est donc une diagonale du quadrilatère gauche formé par ces droites. La droite g_2 est l'autre diagonale de ce quadrilatère.

Nous arrivons donc au théorème suivant :

Sur la quadrique Φ_n, nous avons ∞^1 couples de droites r_1, r_2 *d'un mode, dépendant de* v *et ∞^1 couples de droites* s_1, s_2 *de l'autre mode, dépendant de* u. *Les droites* r_1, r_2, s_1, s_2 *sont les arêtes d'un quadrilatère gauche dont les diagonales* g *engendrent une congruence* W.

6. Soient maintenant H_1, H_2 les points de rencontre de la droite $U_n^{01}V_n^{10}$ avec Q, et h_1, h_2 les droites qui leur correspondent.

Les droites G_1H_1 et G_1H_2 appartiennent à Q et représentent les faisceaux focaux de la congruence (g_1). De même, les droites G_2H_1, G_2H_2 appartiennent à Q et représentent les faisceaux focaux de la congruence (g_2).

Considérons l'espace à trois dimensions $U_n^{01}\eta$. La droite conjuguée de cet espace appartient au plan ξ et coupe la conique γ_ξ en deux points $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ (la droite $\overline{R}_1\overline{R}_2$ est la polaire du point U_n^{01} par rapport à la conique). La droite conjuguée de l'espace $V_n^{10}\xi$ coupe la conique $\gamma\eta$ en deux points $\overline{S_1}$, $\overline{S}_2$ situés sur la polaire de V_n^{10} par rapport à cette conique.

Les droites $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ représentées par les points $\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$ et les droites $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ représentées par les points $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$ appartiennent à Φ_n et forment sur cette quadrique un quadrilatère gauche. Les diagonales h_1, h_2 de celui-ci sont représentées sur Q par les points H_1, H_2. La droite G_1H_1 appartenant à Q, les droites g_1 et h_1 se rencontrent en un point qui est un des foyers de la droite g_1. Plus généralement, les droites h_1, h_2 rencontrent les droites g_1, g_2 aux foyers de celles-ci. Donc :

Les droites h_1, h_2 *coupent les droites* g_1, g_2 *aux foyers de celles-ci.*

Les couples de droites $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$ ne dépendent que de v et les couples de droites $\bar{s}_1$, $\bar{s}_2$ que de u. Les droites h_1, h_2 engendrent une congruence (h) analogue à la congruence (g).

Liège, le 25 novembre 1961.