Bulletin de la Classe des sciences

Waelbroeck (L.) : Étude spectrale des algèbres complètes. Rapport des Commissaires

Théophile Henri Joseph Lepage, Lucien Godeaux, Fernand Simonart

Rapport sur le mémoire de M. Lucien Waelbroeck :

Étude spectrale des Algèbres complètes.

Dans un travail antérieur (*) M. L. Waelbroeck apportait un complément important à la théorie de Gelfand des algèbres commutatives normées. Il y considérait des algèbres topologiques plus générales et le calcul symbolique était défini pour un système de plusieurs éléments de l'Algèbre.

Soit A une algèbre commutative d'opérateurs sur le corps des nombres complexes, possédant un élément unité. Le Calcul symbolique consiste essentiellement en la détermination d'une algèbre de fonctions et en la construction de certain homomorphisme de cette dernière dans A. Chez Gelfand l'homomorphisme $f(s) \to f(a)$, où $s = (s_1, \ldots s_n) \in C^n$, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$, se trouve défini lorsque $f(s)$ est holomorphe sur l'ensemble des points $s \in C^n$ tels que l'idéal engendré par $a_1 - s_1, \ldots, a_n - s_n$, soit un idéal propre : c'est un ensemble *compact* appelé *spectre* de a. Notons encore que dans la théorie de Gelfand, comme dans le travail cité de Waelbroeck, l'intégrale classique de Cauchy, de la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe, joue un rôle fondamental pour la construction de cet homomorphisme.

Or si la théorie de Gelfand est applicable aux algèbres commutatives normées, ainsi qu'aux éléments « réguliers », de certaines algèbres topologiques plus générales, elle ne l'est plus pour les opérateurs dont le spectre n'est pas compact : par exemple, pour les opérateurs de dérivation partielle des espaces de distributions. Il en résulte notamment l'inconvénient que le calcul symbolique de Gelfand n'englobe pas le calcul symbolique d'Heaviside.

Dans le présent Mémoire, M. L. Waelbroeck réussit à définir un Calcul symbolique sur les éléments dont le spectre n'est pas compact.

Une analyse des travaux antérieurs le conduit tout d'abord à observer que le caractère topologique des Algèbres considérées jusqu'à présent ne joue pas de rôle essentiel : les résultats ne dépendent

---

(*) (Le Calcul symbolique dans les Algèbres commutatives) ; *Journal de Math. p. et appl.* (1954).

que de l'ensemble des *parties bornées* de A. Cette constatation le conduit à mettre en évidence la notion très générale d'*algèbre, à bornés, complète* (commutative ou non, mais possédant une unité). Les deux premiers chapitres du Mémoire sont consacrés à une étude, fort détaillée et très précise, des Algèbres de ce type.

Observons que ces Algèbres ne sont pas nécessairement commutatives ; toutefois les éléments $a = (a_1, \ldots, a_n)$ pour lesquels le calcul symbolique sera défini appartiendront au centre de l'algèbre A. De plus la théorie spectrale sera relative en ce sens que les éléments $a_1, \ldots,$ a_n seront considérés *modulo* certain idéal bilatère de A.

La notion de spectre du système $(a_1 \ldots a_n)$, introduite par Waelbroeck, est entièrement nouvelle et diffère profondément de celle de Gelfand. Le spectre n'est plus un ensemble d'un espace vectoriel complexe, s'introduisant par l'étude des éléments inverses ; c'est un filtre de fonctions, lié à la condition qu'un idéal soit impropre, c'est-à-dire identique à toute l'algèbre. L'étude du spectre, développée dans les chapitres III à VI, exige une connaissance approfondie des algèbres et de la théorie récente des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. L'auteur l'emploie avec maîtrise et les résultats qu'il obtient ne sont pas seulement entièrement originaux, mais d'une réelle importance puisqu'il parvient à définir un calcul symbolique construit, non plus à partir de l'intégrale de Cauchy, mais à partir d'une intégrale très originale ne portant plus sur une fonction analytique.

L'importance de la théorie développée apparaît encore au dernier chapitre où l'auteur confronte ses résultats avec ceux que l'on obtenait grâce à des hypothèses dont la nature simplificatrice est mise en pleine lumière. En particulier l'auteur montre qu'elle fournit une construction nouvelle du calcul d'Heaviside pour plusieurs variables.

Le mémoire cité de 1954 avait déjà attiré l'attention des spécialistes qui en ont fait un vif éloge. Nous ne doutons pas qu'il n'en soit de même pour le présent travail qui, reprenant la théorie tout entière à partir d'hypothèses très générales, la développe avec le plus grand succès.

Nous sommes heureux d'en proposer l'impression dans la série des Mémoires de l'Académie.

Bruxelles, le 24 mars 1960.

Th. LEPAGE.

Nous nous rallions aux conclusions de notre savant Confrère d'autant plus volontiers que le mémoire nous paraît fort important.

L. GODEAUX — F. SIMONART.