Bulletin de la Classe des sciences

Sur une involution rationnelle du septième ordre appartenant à une surface de genre trois

Lucien Godeaux

Résumé
On démontre que l'on peut construire, sur la surface F de S6 intersection d'un cône V43 dont les sections hyperplanes sont des surfaces de Veronese et d'une hypersurface cubique, surface ayant les genres pa = pg = 3, P2 = 6, p(1) = 4, une involution cyclique rationnelle d'ordre sept, possédant trois points unis.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur une involution rationnelle du septième ordre appartenant à une surface de genre trois,

par L. GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On démontre que l'on peut construire, sur la surface F de S_6 intersection d'un cône V_3^4 dont les sections hyperplanes sont des surfaces de Veronese et d'une hypersurface cubique, surface ayant les genres $p_a = p_g = 3$, $P_2 = 6$, $p^{(1)} = 4$, une involution cyclique rationnelle d'ordre sept, possédant trois points unis.

Nous avons établi autrefois que la surface F_1 qui représente les couples de points non ordonnés de la quartique de Klein

$$a_1x_1^3x_2 + a_2x_2^3x_3 + a_3x_3^3x_1 = 0$$

contient une involution cyclique d'ordre sept, rationnelle, possédant six points unis. La surface F_1, qui a les genres $p_a = 0$, $p_g = 3$ contient d'autre part une involution du second ordre ayant 28 points unis, représentée par une surface F_2 de genres $p_a = p_g = 3$. G. Humbert avait obtenu la surface F_2 comme représentant les couples de points d'une courbe de genre trois, deux couples formant un groupe canonique correspondant au même point. Nous avons montré que F_2 pouvait se ramener birationnellement à la surface section d'un cône V_3^4 dont les sections hyperplanes sont des surfaces de Veronese de S_6, par une hypersurface cubique. A l'involution d'ordre sept considérée sur la surface F_1 correspond sur la surface F_2 une involution d'ordre sept, présentant trois points unis, et qui est rationnelle. Nous avons donné une démonstration de ces faits par un procédé indirect et nous sommes ensuite revenu sur la question pour donner une démonstration plus directe. Enfin, dans notre dernière note citée (1), nous avons indiqué brièvement, dans l'avant-propos, une autre démonstration. C'est celle-ci que nous développons dans cette note, en ajoutant quelques propriétés de l'involution (2).

1. Désignons par x_0, x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{23}, x_{31}, x_{12} les coordonnées projectives homogènes d'un espace S_6 à six dimensions et par O_0 le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf x_0, par O_{ik} le point dont toutes les coordonnées sont nulles sauf x_{ik}. Considérons dans cet espace la surface F d'équations

$$x_{22}x_{33} - x_{23}^2 = 0, \quad x_{33}x_{11} - x_{31}^2 = 0, \quad x_{11}x_{22} - x_{12}^2 = 0,$$

$$x_{11}x_{23} = x_{31}x_{12}, \quad x_{22}x_{31} = x_{12}x_{23}, \quad x_{33}x_{12} = x_{23}x_{31},$$

$$x_0^3 + x_0(a_1x_{11}x_{31} + a_2x_{22}x_{12} + a_3x_{33}x_{23}) + b_1x_{11}^2x_{12}$$
$$+ b_2x_{22}^2x_{23} + b_3x_{33}^2x_{31} + b_4x_{11}x_{22}x_{33} + b_5x_{23}x_{31}x_{12} = 0.$$

Les six premières de ces équations représentent un cône V_3^4 projetant du point O_0 une surface de Veronese située dans l'hyperplan $x_0 = 0$. La dernière équation représente une hypersurface cubique V_5^3 coupant le cône précédent suivant une surface F d'ordre douze.

Rappelons que le système canonique de F est formé des courbes K de genre quatre situées dans les cônes projetant de O_0 les coniques de la surface de Veronese dont il vient d'être question. Ces courbes forment un réseau $|K|$ et on a $p_a = p_g = 3$, $p^{(1)} = 4$.

(1) *Sur une involution rationnelle douée de trois points de coïncidence appartenant à une surface de genre trois* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1921, pp. 653-665, 694-702), *Sur l'existence d'involutions rationnelles n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface algébrique* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1933, pp. 7-14), *Sur une involution rationnelle n'ayant qu'un nombre fini de points unis appartenant à une surface de genre quatre* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1940, pp. 9-17).

(2) Nous supposerons connues nos recherches sur les involutions. Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*. Actualité scient. N° 270 (Paris, Hermann, 1935) et notre *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1952).

Les courbes bicanoniques de F sont les sections hyperplanes et on a $P_2 = 7$.

La surface F est transformée en soi par l'homographie H d'équations

$$x'_0 : x'_{11} : x'_{22} : x'_{33} : x'_{23} : x'_{31} : x'_{12} = \epsilon^5 x_0 : x_{11} : \epsilon^2 x_{22} : \epsilon^6 x_{33} : \epsilon^4 x_{23} : \epsilon^3 x_{31} : \epsilon x_{12},$$

où ϵ est une racine primitive septième de l'unité. Cette homographie a donc la période sept, elle possède comme axes ponctuels les sept sommets de la figure de référence. Trois de ceux-ci, les points O_{11}, O_{22}, O_{33} appartiennent à la surface F de sorte que H engendre sur F une involution I d'ordre sept présentant trois points unis.

Occupons-nous tout d'abord de la structure des points unis.

Le plan tangent à F en O_{11} est donné par $x_{22} = x_{33} = x_{23} = x_{12} = 0$; c'est donc le plan $O_{11}O_0O_{31}$ dans lequel H détermine l'homographie

$$x'_{11} : x'_0 : x'_{31} = x_{11} : \epsilon^5 x_0 : \epsilon^3 x_{31}.$$

En posant $\eta = \epsilon^5$, on a $\eta^2 = \epsilon^3$ et en posant $\zeta = \epsilon^3$, on a $\zeta^4 = \epsilon^5$. On en conclut que les nombres attachés au point uni O_{11} sont $\alpha = 2, \beta = 4$.

Le plan tangent en O_{22} à F a pour équations $x_{11} = x_{33} = x_{31} = x_{23} = 0$, c'est-à-dire que c'est le plan $O_{22}O_0O_{12}$, dans lequel H détermine l'homographie

$$x'_{22} : x'_0 : x'_{12} = \epsilon^2 x_{22} : \epsilon^5 x_0 : \epsilon x_{12},$$

ou encore

$$x'_{22} : x'_3 : x'_{12} = x_{22} : \epsilon^3 x_0 : \epsilon^6 x_{12}.$$

En posant $\eta = \epsilon^3$, on a $\eta^2 = \epsilon^6$ et en posant $\zeta = \epsilon^6$, on a $\zeta^4 = \epsilon^3$. Les nombres attachés au point uni O_{22} sont également $\alpha = 2$, $\beta = 4$.

Au point O_{33}, le plan tangent à F est donné par $x_{11} = x_{22} = x_{12} = x_{31} = 0$; c'est donc le plan $O_{33}O_0O_{23}$ dans lequel H détermine l'homographie

$$x'_{33} : x'_0 : x'_{23} = x_{33} : \epsilon^6 x_0 : \epsilon^5 x_{23}.$$

En posant $\eta = \epsilon^6$, on a $\eta^2 = \epsilon^5$ et en posant $\zeta = \epsilon^5$, on a $\zeta^4 = \epsilon^6$. Les nombres attachés au point O_{33} sont encore $\alpha = 2$, $\beta = 4$.

Les trois points unis de l'involution I ont donc même structure.

2. Désignons par $|C|$ un système linéaire dépourvu de points-base transformé en soi par H, par exemple le système $|7K|$ ou encore le système $|14K|$ découpé sur F par les hypersurfaces du septième ordre. Le système $|C|$ contient sept systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I et dont l'un est dépourvu de points-base. Nous désignerons par $|C_0|$ ce dernier système.

Nous avons établi que les courbes C_0 passant par un point uni, par exemple par O_{11}, acquièrent en ce point la multiplicité quatre et ont un point $(\alpha, 1)$ infiniment voisin situé sur la droite $O_{11}O_0$ multiple d'ordre trois et une suite de trois points simples $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, $(\beta, 3)$ dont le premier est sur la droite $O_{11}O_{31}$. Nous désignerons par O'_{11} le point $(\alpha, 1)$. Ce point, de même que le point $(\beta, 3)$, est uni de première espèce pour l'involution I.

Désignons par F' une surface image de l'involution I et prenons comme modèle projectif de cette surface une surface normale dont les sections hyperplanes correspondent aux courbes C_0. Le point de diramation de la surface F' qui correspond au point uni O_{11} est multiple d'ordre quatre pour la surface F' et le cône tangent en ce point se scinde en un cône cubique et en un plan coupant le cône précédent suivant une seule génératrice. En d'autres termes, le point de diramation est équivalent à une cubique gauche σ'_α et à une droite σ'_β coupant σ'_α en un point. La courbe σ'_α représente le domaine du point $(\alpha, 1)$ ou O'_{11} et la droite σ'_β représente le domaine du point $(\beta, 3)$. La cubique σ'_α a le degré virtuel -4 et la droite σ'_β le degré virtuel -2.

De même, dans le domaine du point uni O_{22}, il existe un point uni de première espèce infiniment voisin situé sur la droite $O_{22}O_0$, que nous désignerons par O'_{22} et une suite de trois points unis infiniment voisins successifs dont le premier est sur la droite $O_{22}O_{12}$ et dont le dernier est uni de première espèce. Le point de diramation correspondant sur F' est équivalent à une cubique gauche σ''_α représentant le domaine du point O'_{22} et à une droite σ''_β.

Enfin, en nous bornant à ce qui nous sera nécessaire dans la suite, il existe un point uni de première espèce O'_{33} infiniment voisin de O_{33} sur la droite $O_{33}O_0$. Le point de diramation correspondant sur F' est quadruple pour cette surface et équivalent à une cubique gauche σ'''_α représentant le domaine de O'_{33} et à une droite σ'''_β.

3. Supposons que la surface F' possède une courbe canonique K'. Cette courbe doit rencontrer les courbes σ'_α, σ''_α, σ'''_α chacune en deux points puisqu'elles sont de degré viruel -4. A la courbe K' correspond sur F une courbe canonique K passant deux fois par les points O_{11}, O'_{11}, O_{22}, O'_{22}, O_{33}, O'_{33}.

Il existe sur la surface F trois courbes canoniques appartenant à l'involution I, à savoir :

La courbe K_1, d'équations

$$x_{22}x_{33} - x_{23}^2 = 0, \qquad x_{11} = x_{31} = x_{12} = 0,$$
$$a_0x_0^3 + a_3x_0x_{33}x_{23} + b_2x_{22}^2x_{23} = 0,$$

La courbe K_2, d'équations

$$x_{33}x_{11} - x_{31}^2 = 0, \qquad x_{22} = x_{23} = x_{12} = 0,$$
$$a_0x_0^3 + a_1x_0x_{11}x_{31} + b_3x_{33}^2x_{31} = 0,$$

La courbe K_3, d'équations

$$x_{11}x_{22} - x_{12}^2 = 0, \qquad x_{33} = x_{23} = x_{31} = 0,$$
$$a_0x_0^3 + a_2x_0x_{22}x_{12} + b_1x_{11}^2x_{12} = 0.$$

Chacun de ces courbes passe par deux des points unis de l'involution, mais non par le troisième. Aucune d'elles ne peut donc être la transformée de la courbe K', donc celle-ci n'existe pas. La surface F' étant dépourvue de courbe canonique et étant d'autre part, comme F, régulière, on a $p_a = p_g = 0$.

La courbe K_1 passe simplement par O_{22} en y touchant la droite $O_{22}O_0$ et doublement par O_{33} en y touchant les droites $O_{33}O_0$ et $O_{33}O_{23}$.

La courbe K_2 passe simplement par O_{33} en y touchant la droite $O_{33}O_0$ et doublement par O_{11} en y touchant les droites $O_{11}O_0$, $O_{11}O_{31}$.

Enfin la courbe K_3 passe simplement par le point O_{11} en y touchant la droite $O_{11}O_0$ et doublement par O_{22} en y touchant les droites $O_{22}O_0$ et $O_{22}O_{12}$.

Supposons maintenant que la surface F' possède une courbe bicanonique. Celle-ci doit rencontrer en quatre points chacune des courbes σ'_α, σ''_α, σ'''_α. Par conséquent il doit lui correspondre sur F une section hyperplane (courbe bicanonique) passant quatre fois par les points O_{11}, O'_{11}, O_{22}, O'_{22}, O_{33}, O'_{33}.

Il existe sur F sept courbes bicanoniques appartenant à l'involution I, ce sont les sections de la surface par les hyperplans de la figure de référence. Parmi celles-ci, quatre contiennent les points unis, ce sont les sections de F par les hyperplans $x_0 = 0$, $x_{23} = 0$, $x_{31} = 0$, $x_{12} = 0$. La section de F par l'hyperplan $x_0 = 0$ ne peut convenir car elle passe simplement par les trois points unis.

Considérons la section de F par l'hyperplan $x_{23} = 0$. Cette section n'est autre que la courbe $K_2 + K_3$. D'après ce qui précède, cette courbe passe deux fois par les points O_{11} et O'_{11}, une fois par les points O_{22} et O'_{22}, O_{33} et O'_{33}. Elle ne peut donc être la transformée de la courbe bicanonique éventuelle de F'. Pour la même raison, les courbes découpées par les hyperplans $x_{31} = 0$, $x_{12} = 0$ doivent être écartées.

La surface F' étant dépourvue de courbe bicanonique, on a $P_2 = 0$ et par conséquent, cette surface est rationnelle d'après le théorème de Castelnuovo ($p_a = P_2 = 0$).

4. Nous construirons pour terminer un modèle projectif de la surface F'.

Partons d'une courbe K quelconque, soit $\overline{K}_1$, et désignons par $\overline{K}_2, \overline{K}_3, \ldots, \overline{K}_7$ ses transformées successives par H. A la courbe $\overline{K}_1$ correspond sur F' une courbe K' et à cette courbe correspondent sur F les sept courbes $\overline{K}_1, \overline{K}_2, \ldots, \overline{K}_7$. La courbe K' est de genre quatre mais il existe sur la courbe $\overline{K}_1$ neuf couples de points appartenant à un même groupe de l'involution I ; ce sont les points découpés sur $\overline{K}_1$ par les courbes $\overline{K}_2, \overline{K}_3, \ldots, \overline{K}_7$. A ces neuf couples de points correspondent neuf points doubles de la courbe K' qui est donc de genre virtuel $4 + 9 = 13$. Lorsque $\overline{K}_1$ varie dans $|K|$, K' décrit un système rationnel et par conséquent les courbes K′ appartiennent totalement à un système linéaire que nous désignerons par $|\Gamma|$. Aux courbes Γ correspondent sur F des courbes C du système linéaire

$$|C| = |\overline{K}_1 + \overline{K}_2 + \ldots + \overline{K}_7|$$

ou, d'une manière plus précise, des courbes C_0 formant un système linéaire partiel $|C_0|$ appartenant à l'involution I, privé de points-base et contenu dans $|C|$.

Les courbes C_0 ont le genre 85 et le degré 3.49. La formule de Zeuthen montre que les courbes Γ ont bien le genre 13. Le degré de $|\Gamma|$ est 21 et la surface F′ étant rationnelle, $|\Gamma|$ a la dimension 9. En rapportant projectivement les courbes Γ aux hyperplans d'un espace linéaire S_9 à neuf dimensions, on obtient un modèle projectif de F′, d'ordre 21, à sections hyperplanes de genre 13, que nous continuerons à désigner par F′.

Comme on l'a vu, les points de diramations correspondant aux points unis O_{11}, O_{22}, O_{33} sont quadruples pour la surface F′. Chacun d'eux est équivalent à deux courbes rationnelles : une cubique gauche de degré virtuel -4 et une droite de degré virtuel -2.

Appelons K'_1, K'_2, K'_3 les courbes qui correspondent sur F′ aux courbes K_1, K_2, K_3. Observons que les courbes $7K_1$, $7K_2$, $7K_3$ appartiennent au système $|C_0|$.

La courbe K_1 ayant un point double en O_{33}, est de genre trois. On en déduit, par la formule de Zeuthen, que K'_1 est rationnelle, car l'involution déterminée sur K_1 par H possède trois points unis, un voisin de O_{22}, deux voisins de O_{33}. La courbe K'_1 rencontre en un point chacune des courbes σ''_α, σ'''_α, σ'''_β mais ne rencontre pas les courbes σ'_α, σ'_β, σ''_β. On en conclut la relation fonctionnelle

$$7K'_1 \equiv \Gamma - 2\sigma''_\alpha - \sigma''_\beta - 3\sigma'''_\alpha - 5\sigma'''_\beta.$$

On a de même

$$7K'_2 \equiv \Gamma - 2\sigma'''_\alpha - \sigma'''_\beta - 3\sigma'_\alpha - 5\sigma'_\beta,$$

$$7K'_3 \equiv \Gamma - 2\sigma'_\alpha - \sigma'_\beta - 3\sigma''_\alpha - 5\sigma''_\beta.$$

Les courbes K'_1, K'_2, K'_3 sont des cubiques rationnelles (cubiques planes ayant un point double).

Appelons L la section de F par l'hyperplan $x_0 = 0$ et L' la courbe qui lui correspond sur F'. La formule de Zeuthen montre que la courbe L' est elliptique. D'autre part, la courbe L' doit rencontrer en un point chacune des courbes σ'_β, σ''_β, σ'''_β mais ne rencontre pas les courbes σ'_α, σ''_α, σ'''_α. On a donc

$$7\mathrm{L}' \equiv 2\Gamma + \sigma'_\alpha + \sigma''_\alpha + \sigma'''_\alpha - 2(\sigma'_\beta + \sigma''_\beta + \sigma'''_\beta).$$

La courbe L' est une courbe elliptique du sixième ordre.

Observons que l'on peut voir que la surface F' est dépourvue de courbe canonique. Si une telle courbe K' existait, elle rencontrerait les courbes σ'_α, σ''_α, σ'''_α chacune en deux points mais ne rencontrerait pas les courbes σ'_β, σ''_β, σ'''_β. On devrait donc avoir

$$7\mathrm{K}' \equiv \Gamma - 3(\sigma'_\alpha + \sigma''_\alpha + \sigma'''_\alpha) - (\sigma'_\beta + \sigma''_\beta + \sigma'''_\beta).$$

La courbe K' est d'ordre trois et si l'on désigne par x son degré, on aurait $7x = 3 - 18$, ce qui est impossible.

On démontrerait de même qu'une courbe bicanonique ne peut exister.

Liège, le 4 juillet 1961.