SUR LES

VARIÉTÉS A TROIS DIMENSIONS

QUI REPRÉSENTENT

LES COUPLES DE POINTS

D'UNE COURBE ET D'UNE SURFACE ALGÉBRIQUES

PAR

Lucien GODEAUX

CANDIDAT EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

BRUXELLES

HAYEZ, IMPRIMEUR DES ACADÉMIES ROYALES DE BELGIQUE
Rue de Louvain, 112

—

1910

Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége*,
3e série, t. IX, 1910.

SUR LES

VARIÉTÉS A TROIS DIMENSIONS

QUI

REPRÉSENTENT LES COUPLES DE POINTS

D'UNE COURBE ET D'UNE SURFACE ALGÉBRIQUES

L'étude des surfaces algébriques qui représentent les couples de points d'une ou deux courbes algébriques a été faite il y a quelques années par trois géomètres italiens : MM. De Franchis (*), Maroni (**) et Severi (***). Dans un beau mémoire qui vient de paraître, M. Severi (IV) s'est occupé de la variété algé-

(*) *Sulle varietà* ∞^2 *delle coppie di punti di due o di una curva algebrica.* (Rendiconti di Palermo, 1903, t. XVII.) — *Sulle corrispondenze algebriche fra due curve.* (Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, 1° sem., 1903, (5), t. XII.)

(**) *Sulle superficie algebriche possedenti due fasci di curve algebriche unisecanti.* (Atti della R. Accad. di Torino, 1903, t. XXXVIII.)

(***) *Sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di una curva algebrica.* (Atti della R. Accad. di Torino, 1903, t. XXXVIII.) — *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie.* (Memorie della R. Accad. di Torino, 1903 (2), t. LIV.)

(IV) *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche* (Rendiconti di Palermo, 1909, t. XXVIII.) — Un résumé de ce Mémoire avait été publié antérieurement sous le titre : *Alcune proposizioni fondamentali per la geometria sulle varietà algebriche.* (Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, 2e sem., 1907, (5), t. XVI.)

brique à trois dimensions dont les points représentent sans exception les couples de points d'une courbe et d'une surface; le savant géomètre a construit le système canonique de cette variété par la considération des intégrales triples de première espèce. Dans la note suivante, je me propose de construire le système canonique en employant les méthodes algébrico-géométriques.

Dans la première de ses notes citées plus haut, M. De Franchis avait établi une relation entre les caractères virtuels d'une courbe appartenant à la surface algébrique qui représente les couples de points d'une ou de deux courbes algébriques. Des relations analogues existent naturellement entre les caractères virtuels des surfaces appartenant à la variété qui fait l'objet de ce travail, mais leur recherche est moins simple que dans le cas des surfaces. Nous recherchons ensuite les invariants de Zeuthen-Segre et de Pannelli.

1. — Désignons par V une variété algébrique à trois dimensions qui représente sans exception les couples de points d'une courbe C_0 de genre $p > 0$ et d'une surface F_0 privée de courbes exceptionnelles, de genre géométrique $p_g > 0$, de genre arithmétique p_a, d'invariant de Calstelnuovo-Enriques ω et d'invariant de Zeuthen-Segre i.

Les caractères de la variété V calculés par M. Severi sont : le genre géométrique $P_g = pp_g$, le genre arithmétique $P_a = (p - 1) p_a + p$, les caractères du système canonique $\Omega_0 = 6(p - 1)(\omega - 1)$, $\Omega_1 = 9(p - 1)(\omega - 1) + 1$, $\Omega_2 = 3(p - 1)(\omega - 1) + 2(p - 1) p_a + 2p - 3$, et l'irrégularité superficielle $q_2 = (p_g - p_a) + p$.

La variété V possède un faisceau $\{F\}$ birationnellement identique à C_0 de surfaces F identiques à F_0, et une congruence $\{\{C\}\}$ identique à F_0 formée par des courbes C identiques à C_0. Les surfaces F et les courbes C sont unisécantes.

Dans la suite de ce travail, nous désignerons par $|\Phi|$ le système canonique de V et par $|\Theta_0|$ le système canonique de F_0. Une surface de V formée par les courbes C qui correspondent aux points d'une courbe Θ_0 sera désignée par Θ. On voit qu'une telle surface représente sans exception les couples de points de C_0 et d'une courbe Θ_0. De plus, nous utiliserons les notations suivantes, déjà employées par M. Severi : H, K, L étant trois surfaces de V, (H, K) désignera la courbe, intersection des surfaces H, K et [H, K] le genre de cette courbe, (H, K, L) le groupe de points et [H, K, L] le nombre de points communs aux trois surfaces H, K, L.

2. Considérons sur la surface F_0 un système linéaire $|\Gamma_0|$, ∞^3 au moins, simple, irréductible et dépourvu de points de base. Une surface Γ qui représente (sans exception) les couples de points de la courbe C_0 et d'une courbe Γ_0 appartient à un système linéaire ∞^3 au moins et dépourvu de points de base. On sait que la surface Γ possède deux faisceaux de courbes unisécantes, l'un formé de courbes C et l'autre de (ΓF), par conséquent le système canonique de cette surface se compose d'un groupe de C canonique pour le faisceau et d'un groupe de (ΓF), canonique pour le faisceau de ces courbes.

Si Γ_a est une surface qui représente (sans exception) les couples de points de C_0 et d'une courbe adjointe à $|\Gamma_0|$, la courbe $(\Gamma_a \Gamma)$ se compose de $2\pi - 2$ courbes C, π étant le genre de Γ_0. Donc, si $|\Gamma'|$ est le système adjoint à $|\Gamma|$, on a, sur la surface Γ,

$$(\Gamma\Gamma') \equiv (2p - 2)(\Gamma F) + (\Gamma\Gamma_a).$$

Par un théorème de M. Severi (*), on a

$$\Gamma' \equiv (2p - 2) F + \Gamma_a.$$

Mais d'autre part,

$$\Gamma' \equiv \Gamma + \Phi$$

(*) Severi, *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà.* (Atti del R. Istituto Veneto di Sc., let. et arti., 1906, t. LXV.)

et, dans la congruence $\}\}C\{\{$,

$$\Gamma_a \equiv \Gamma + \Theta.$$

De ces trois formules on déduit

$$\Phi \equiv (2p - 2)F + \Theta. \qquad (1)$$

Une surface canonique de la variété V *s'obtient en réunissant à* 2p — 2 *surfaces formant un groupe canonique du faisceau* $\}F\{$, *une surface engendrée par* ∞^1 *courbes* C *formant une variété canonique de la congruence* $\}\}C\{\{$.

Tel est le théorème établi par M. Severi dans son Mémoire sur les variétés, cité plus haut.

3. Remarquons que deux courbes de la congruence $\}\}C\{\{$ ne peuvent avoir aucun point commun, car on peut toujours former un faisceau irrationnel de courbes C. On en conclut en premier lieu que le degré virtuel du système $|\Gamma|$ est nul. En second lieu, deux surfaces Γ ont en commun m_0 courbes C, m_0 étant le degré virtuel de $|\Gamma_0|$, par conséquent

$$[\Gamma^2] = m_0(p - 1) + 1.$$

4. Considérons une correspondance $\mathcal{A}$ établie entre les points de la courbe C_0 et ceux de la surface F_0 A un point a de C_0 correspondent les points d'une courbe A_0 de F_0. Lorsque le point a décrit la courbe C_0, la courbe A_0 varie dans un système continu $\}A_0\{$ de degré virtuel m. Inversement, à un point de F_0 correspondent μ points de C_0. Nous dénoterons par π le genre de A_0. Les points de V qui représentent des couples de points correspondants de $\mathcal{A}$ sont situés sur une surface A de degré virtuel n_0, d'invariant de Castelnuovo-Enriques ω_0 et dont la courbe caractéristique a le genre p_0.

Chaque surface F rencontre la surface A suivant une courbe de genre π et chaque courbe C rencontre la même surface en μ points.

5. On a identiquement

$$[\Phi + A, \Phi, A] = [\Phi^2 A] + [\Phi A^2],$$

et

$$[(\Phi + A)^2, A] = [\Phi + A, \Phi, A] + [\Phi A^2] + [A^3],$$

d'où

$$[(\Phi + A)^2, A] = [\Phi^2 A] + 2[\Phi A^2] + [A^3]. \tag{2}$$

Les surfaces $\Phi + A$ découpent sur A le système canonique, donc

$$[(\Phi + A)^2, A] = \omega_0 - 1. \tag{3}$$

D'autre part

$$[\Phi A^2] = 2p_0 - 2 - 2n_0, \qquad [A^3] = n_0. \tag{4}$$

La formule (1) donne successivement

$$\begin{aligned}
[\Phi^2 A] &= (2p - 2)[F\Phi A] + [\Theta\Phi A],\\
[F\Phi A] &= (2p - 2)[F^2 A] + [\Theta F A],\\
[\Theta\Phi A] &= (2p - 2)[\Theta F A] + [\Theta^2 A],\\
[\Phi^2 A] &= 2(2p - 2)[\Theta F A] + [\Theta^2 A].
\end{aligned}$$

Or

$$[\Theta^2 A] = \mu(\omega - 1), \quad [\Theta F A] = [A_0 \Theta_0] = 2\pi - 2 - m$$

Donc

$$[\Phi^2 A] = 2(2p - 2)(2\pi - 2 - m) + \mu(\omega - 1).$$

De la formule précédente et des formules (2), (3) et (4) on déduit

$$\omega_0 - 1 = 2(2p - 2)(2\pi - 2 - m) + 2(2p_0 - 2) - 3n_0 + \mu(\omega - 1). \tag{5}$$

On obtient ainsi une première liaison entre les caractères de la surface A.

6. De la formule (1) on déduit

$$(\Phi A) \equiv (2p-2)(FA) + (\Theta A),$$

ou

$$[\Phi A] = [(2p-2)F, A] + [\Theta A] + (2p-2)[AF\Theta] - 1.$$

D'autre part, on a identiquement

$$(\Phi + A, A) \equiv (\Phi, A) + (AA),$$

ou

$$\omega_0 = [\Phi A] + p_0 + [AA\Phi] - 1.$$

De là,

$$\omega_0 = [(2p-2)F, A] + [\Theta A] + p_0 + (2p-2)[AF\Theta] + [A^2\Phi] - 2. \quad (6)$$

On a

$$[(2p-2)F, A] = (2p-2)\pi - (2p-2) + 1,$$
$$[AF\Theta] = 2\pi - 2 - m, \quad [A^2\Phi] = 2p_0 - 2 - 2n_0.$$

Moyenant ces trois égalités, la formule (6) devient

$$\omega_0 = [\Theta A] + 3(2p-2)(\pi-1) - m(2p-2) + 3(p_0-1) - 2n_0. \quad (7)$$

Considérons la surface Θ qui représente les couples de points de C_0 et d'une courbe canonique Θ_0 de F_0. La correspondance $\mathcal{A}$ définit, entre C_0 et Θ_0, une correspondance d'indices (μ, $2\pi - 2 - m$). La courbe (ΘA) représente, sur cette surface Θ, les couples de points liés par cette correspondance, donc on a (*)

$$2[\Theta A] - 2 = [\Theta A^2] + 2(p-1)(2\pi - 2 - m) + 2\mu(\omega - 1).$$

En combinant les formules (5) et (7) avec cette dernière, on trouve

$$[\Theta A^2] = 2(p_0 - 1) - 2m(p-1) - 2n_0 - 1.$$

(*) De Franchis, *loc. cit.*

Si la surface A appartient à un système continu, ∞^1 au moins, on a $[\Theta A^2] \geqslant 0$, d'où

$$2(p_0 - 1) \geqslant 2m(p-1) + 2n_0 + 1.$$

7. Désignons par I_0 l'invariant de Zeuthen Segre de la variété V. Les surfaces F sont toutes birationnellement identiques à F_0, par conséquent, aucune d'elles ne possède de singularités altérant les caractères invariants non communs à toutes ces surfaces. En appliquant une formule que j'ai établie récemment (*), on a

$$I_0 = 2(p-1)(i+4) + 6.$$

L'invariant de Pannelli, I_1, est donné par la formule (**)

$$48P_a - 54 = 2I_1 - I_0,$$

d'où, comme $P_a = (p-1)\, p_a + p$,

$$I_1 = (p-1)(24p_a + i + 28).$$

(*) *Sur l'invariant de Zeuthen-Segre.* (Bull. de l'Acad. roy. de Belgique. Classe des sciences, 1909.)

(**) Pannelli, *Sopra un carattere di una varieta algebrica a tre dimensioni.* (Atti del IV Congresso dei Matematici. Roma, 1908, t. II.)