Bulletin de la Classe des sciences

Sur le système canonique d'une surface image d'une involution appartenant à une surface du onzième ordre

Lucien Godeaux

Résumé

Construction du système canonique d'une surface de genres pa = pg = 9, image d'une involution d'ordre treize, appartenant à une surface du onzième ordre, possédant trois points unis de même structure. Dans le système canonique se trouvent une double infinité de courbes dégénérées en une courbe fixe, de genre trois et de degré virtuel —1, en deux courbes variables d'un faisceau de degré trois et de genre neuf, et en six courbes rationnelles, trois de degré virtuel —2 comptées deux fois, trois de degré virtuel —3.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur le système canonique d'une surface image d'une involution appartenant à une surface du onzième ordre,

par L. GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction du système canonique d'une surface de genres $p_a = p_g = 9$, image d'une involution d'ordre treize, appartenant à une surface du onzième ordre, possédant trois points unis de même structure. Dans le système canonique se trouvent une double infinité de courbes dégénérées en une courbe fixe, de genre trois et de degré virtuel -1, en deux courbes variables d'un faisceau de degré trois et de genre neuf, et en six courbes rationnelles, trois de degré virtuel -2 comptées deux fois, trois de degré virtuel -3.

La question étudiée dans ce travail est une application de la théorie des involutions cycliques d'ordre premier, n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique (1). Nous considérons sur une surface du onzième ordre, F, une involution cyclique I d'ordre treize, possédant trois points unis que nous démontrons être de même structure. Sur la surface Φ, image de l'involution, chacun des points de diramation est équivalent à trois courbes rationnelles, une de degré virtuel -2, les autres de degré virtuel -3. Nous construisons le système canonique de la surface Φ, qui est de genres $p_a = p_g = 9$. Dans

(1) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*. ACT. SCIENT. n° 270 (Paris, Hermann, 1935). *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mém. in-8° de l'Acad. roy. de Belgique, 1952). *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples* (Deuxième Colloque de Géométrie algébrique du C. B. R. M., Liége, 1952, pp. 225-241). *La théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (BULL. DE LA SOC. ROY. DES SCIENCES DE LIÉGE, 1957, pp. 3-15). *Construction du système canonique d'une surface multiple* (BULL. DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1961, pp. 156-160).

ce système, et c'est ce qui fait à notre avis l'intérêt de cette note, il y a une double infinité de courbes dégénérées en une courbe fixe de genre trois et de degré virtuel -1, en six des composantes des points de diramation et en des couples de courbes variables dans un faisceau de genre neuf et de degré trois.

Pour éviter des longueurs inutiles, nous conserverons les notations du second mémoire cité plus haut sans en donner à nouveau la définition.

1. Considérons la surface F d'ordre onze, dont nous écrirons provisoirement l'équation sous la forme

$$a_1 x_1^{10} x_2 + a_2 x_2^{10} x_3 + a_3 x_3^{10} x_1 + a_4 x_4^{11} = 0$$

et l'homographie H de période treize,

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} x_1 & \epsilon x_2 & \epsilon^4 x_3 & \epsilon^6 x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x^4 \end{pmatrix},$$

ϵ étant une racine primitive d'ordre treize de l'unité.

L'homographie H transforme la surface F en soi et engendre sur celle-ci une involution I possédant trois points unis : les sommets (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) du tétraèdre de référence situés dans le plan $x_4 = 0$.

Nous démontrerons tout d'abord que ces trois points unis ont même structure. On sait que celle-ci, lorsque le point uni est de seconde espèce, est déterminée par un nombre α tel que dans le domaine du premier ordre d'un point uni, l'homographie H détermine une homographie binaire $\lambda' : \mu' = \epsilon\lambda : \epsilon^\alpha \mu$.

Dans le plan tangent $x_2 = 0$ au point O_1 à F, H détermine l'homographie

$$(x_1 \quad \epsilon^4 x_3 \quad \epsilon^6 x_4).$$

Si l'on pose $\eta = \epsilon^4$, on a $\epsilon^6 = \eta^8$, donc $\alpha = 8$.

Dans le plan tangent $x_3 = 0$ à F en O_2, H détermine l'homographie

$$(x_1 \quad \epsilon x_2 \quad \epsilon^6 x_4) \qquad \text{ou} \qquad (\epsilon^{12} x_1 \quad x_2 \quad \epsilon^5 x_4).$$

En posant $\eta = \epsilon^{12}$, on a $\epsilon^5 = \eta^8$, donc $\alpha = 8$.

Enfin, dans le plan tangent $x_1 = 0$ en O_3 à F, H détermine l'homographie

$$(\epsilon x_2, \quad \epsilon^4 x_3, \quad \epsilon^6 x_4) \qquad \text{ou} \qquad (\epsilon^{10} x_2, \quad x_3, \quad \epsilon^2 x_4).$$

En posant $\eta = \epsilon^1{}_0$, on a $\eta^8 = \epsilon^2$ donc encore $\alpha = 8$.

2. Nous déterminerons ensuite la structure du point O_1. En posant $\eta = \epsilon^6$, on a $\eta^5 = \epsilon^1$ et l'homographie H détermine dans le domaine du premier ordre de O_1 une homographie qui peut également être représentée par

$$\lambda' : \mu' = \eta^\beta \lambda : \eta\mu,$$

où l'on pose $\beta = 5$.

Considérons sur F un système linéaire $|C|$, privé de points-base, transformé en soi par H et contenant treize systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I dont l'un, $|C_0|$, est dépourvu de points-base.

Cherchons les solutions en nombres entiers positifs des congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv \lambda + 8\mu \equiv 0, \qquad \mu + \beta\lambda \equiv \mu + 5\lambda \equiv 0, \quad (\text{mod. } 13).$$

Nous trouvons les solutions suivantes :

$$\lambda_1 = 2,\ \mu_1 = 3\ ;\ \lambda_2 = 5,\ \mu_2 = 1\ ;\ \lambda_3 = 1,\ \mu_3 = 8\ ;$$
$$\lambda_4 = 4,\ \mu_4 = 6\ ;\ \lambda_5 = 7,\ \mu_5 = 4\ ;\ \lambda_6 = 10,\ \mu_6 = 2.$$

Nous avons

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = 2.13, \qquad \mu_1 + \beta\lambda_1 = 13,$$

donc le point O_1 est un point uni de seconde espèce et de deuxième catégorie.

Les courbes C'_0, c'est-à-dire les courbes C_0 passant par O_1, ont en ce point la multiplicité cinq et passent deux fois par le point $(\alpha, 1)$, une fois par les points $(\alpha, 2), (\alpha, 3), \ldots, (\alpha, 7)$, une fois par le point $(\alpha, 1, 1)$, deux fois par les points $(\beta, 1), \ldots, (\beta, 4)$. Le point $(\alpha, 1)$ se trouve sur la droite O_1O_3 et le point $(\beta, 1)$ sur la droite O_1O_4. Les points $(\alpha, 7)$, $(\alpha, 1, 1)$ et $(\beta, 4)$ sont unis de première espèce.

Si nous désignons par Φ la surface image de l'involution I dont les sections hyperplanes Γ' correspondent aux courbes C_0 et par Φ_1 la surface dont les sections hyperplanes Γ'' correspondent aux courbes C_0', aux domaines des points $(\alpha, 7)$, $(\alpha, 1, 1)$, $(\beta, 1)$ correspondent respectivement sur Φ_1 une droite σ_α, une droite τ_α et une conique σ_β. Le point de diramation O_1' qui correspond sur Φ au point uni O_1 est donc quadruple pour cette surface. Comme Φ_1 peut être considérée comme la projection de Φ à partir de O_1' sur un hyperplan, le cône tangent à cette dernière surface en O_1' est la projection à partir de ce point des courbes σ_α, τ_α et σ_β.

Appelons C_0'' les courbes C_0' assujetties à toucher en O_1 une droite distincte de O_1O_3, O_1O_4. Les courbes C_0'' passent six fois par O_1, une fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, 7)$, quatre fois par $(\beta, 1)$, une fois par $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, 4)$, une fois par les points $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 1, 1)$, $(\beta, 1, 1, 2)$. Aux courbes C_0'' correspondent sur Φ_1 les sections hyperplanes Γ'' passant par un point commun aux courbes τ_α et σ_β. Si n est l'ordre de Φ, Φ_1 est d'ordre $n - 4$ et le degré effectif de $|\Gamma''|$ étant $n - 5$, le point commun aux courbes de ce système est simple pour Φ_1. On en conclut que le point de diramation O' est équivalent à trois courbes rationnelles σ_α, τ_α, σ_β, de degrés virtuels respectifs -2, -3, -3. On a

$$\Gamma \equiv \Gamma' + \sigma_\alpha + \tau_\alpha + \sigma_\beta.$$

La courbe τ_α rencontre chacune des courbes σ_α, σ_β en un point, mais ces deux dernières courbes ne se rencontrent pas.

Bien que cela ne nous soit pas nécessaire pour la suite, nous indiquerons le comportement en O_1 des courbes C_0''', $C_0^{(4)}$, $C_0^{(5)}$, $C_0^{(6)}$ ayant des multiplicités croissantes en ce point.

Les courbes C_0''' passent neuf fois par O_1, quatre fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 1, 1)$ et une fois par $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, 4)$. Les courbes $C_0^{(4)}$ passent dix fois par O_1, trois fois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 1, 1)$, trois fois par $(\beta, 1)$, une fois par $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 1, 1)$, $(\beta, 1, 1, 2)$. Les courbes $C_0^{(5)}$ passent onze fois par O_1, deux fois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 1, 1)$, deux fois par $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$, $(\beta, 1, 2)$, une fois par $(\beta, 1, 3)$, $(\beta, 1, 3, 1)$. Enfin les courbes $C_0^{(6)}$ passent douze fois par O_1, une fois par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 1, 1)$, $(\beta, 1)$, $(\beta, 1, 1)$, ..., $(\beta, 1, 9)$.

3. Dans la suite de ce travail nous aurons plusieurs fois à considérer des systèmes linéaires de courbes appartenant à l'involution I et se comportant d'une manière symétrique vis-à-vis des points unis O_1, O_2, O_3. Nous rechercherons l'équation des surfaces découpant sur F ces systèmes de courbes de la manière suivante :

Si l'équation d'une telle surface supposée d'ordre n contient le terme $x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}x_4^{n-i_1-i_2-i_3}$, elle contient aussi les termes $x_2^{i_1}x_3^{i_2}x_1^{i_3}x_4^{n-i_1-i_2-i_3}$, $x_3^{i_1}x_1^{i_2}x_2^{i_3}x_4^{n-i_1-i_2-i_3}$. Cela implique les congruences

$$i_2 + 4i_3 \equiv i_{i_1} + 4i_{i_2} = i_3 + 4i_1, \qquad (\text{mod. } 13)$$

c'est-à-dire, k et l étant des entiers positifs,

$$i_2 + 3i_3 = 4i_{i_1} + 13k, \qquad 4i_2 - i_{i_3} = 3i_{i_1} + 13l,$$

d'où

$$i_2 = i_1 + k + 3l, \qquad i_3 = i_1 + 4k - l.$$

On doit avoir

$$i_1 + i_2 + i_3 = 3i_1 + 5k + 2l \leqslant n, \qquad k + 3l \leqslant n.$$

On détermine ainsi facilement l'équation des surfaces cherchées.

Le premier membre de l'équation de la surface F se reproduit multiplié par ϵ lorsque l'on effectue H. Le procédé précédent donne pour équation complète de F,

$$\begin{aligned} a_{01}x_1^{10}x_2 + a_{02}x_2^{10}x_3 + a_{03}x_3^{10}x_1 + x_4(a_{11}x_1^8x_3^2 + a_{12}x_2^8x_1^2 + a_{13}x_3^8x_2^2) \\ + x_4^2(a_{21}x_1^7x_2^2 + a_{22}x_2^7x_3^2 + a_{23}x_3^7x_1^2) + x_4^3(a_{41}x_1^5x_2x_3^2 \\ + a_{42}x_2^5x_3x_1^2 + a_{43}x_3^5x_1x_2^2) + x_4^4(a_{51}x_1^4x_2^3 + a_{52}x_2^4x_3^3 \\ + a_{53}x_3^4x_1^3) + x_4^6(a_{61}x_1^4x_3 + a_{62}x_2^4x_1 + a_{63}x_3^4x_2) \\ + (x_1x_2x_3)^2(a_1x_1^4x_3 + a_2x_2^4x_1 + a_3x_3^4x_2) \\ + a_4x_4^{11} + a_5x_1x_2x_3x_4^8 + a_6(x_1x_2x_3)^2x_4^5 + a_7(x_1x_2x_3)^2x_4^2 = 0. \end{aligned}$$

C'est cette équation que nous prendrons dorénavant pour équation de la surface F. Rien de ce que nous avons obtenu précédemment n'est changé.

4. Désignons par $|L'|$ le système canonique de la surface Φ et par $|L_0|$ le système qui lui correspond sur F. Les courbes L_0

sont des courbes canoniques de F et puisque cette surface est dépourvue de points multiples, elles sont découpées sur F par des surfaces d'ordre sept.

Les courbes L′ doivent rencontrer en $n-2$ points une courbe rationnelle de degré virtuel $-n$, par conséquent elles doivent passer deux fois par le point O_1', une des tangentes appartenant au plan projetant τ_α du point O_1', l'autre appartenant au cône projetant la conique σ_β du même point. Elles ont des comportements analogues en O_2', O_3'.

Les courbes L_0 doivent passer une fois par le point $(\alpha, 1, 1)$ et par le point $(\beta, 4)$, par conséquent elles passent une fois par le point $(\alpha, 1)$, une fois par les points $(\beta, 3), \ldots, (\beta, 1)$ et trois fois par le point O_1. Elles ont des comportements analogues en O_2, O_3.

L'équation des surfaces découpant sur F les courbes L_0 s'obtient facilement en utilisant le procédé donné plus haut. On trouve

$$\lambda_1 x_1^4 x_2^3 + \lambda_2 x_2^4 x_3^3 + \lambda_3 x_3^4 x_1^3 + x_4^2(\lambda_4 x_1^4 x_3 + \lambda_5 x_2^4 x_1 + \lambda_6 x_3^4 x_2) \\ + \lambda_7 x_4^7 + \lambda_8 x_1 x_2 x_3 x_4^4 + \lambda_9 (x_1 x_2 x_3)^2 x_4 = 0. \tag{1}$$

On en conclut que le genre géométrique de Φ est $p_g = 9$. De plus, la surface F étant régulière, il en est de même de la surface Φ et le genre arithmétique de celle-ci est $p_a = 9$.

Le degré du système $|L_0|$ est

$$p^{(1)} - 1 - 3.15 = 49.11 - 3.15,$$

donc le genre linéaire de Φ est $p'^{(1)} = 39$.

Nous allons vérifier le comportement des courbes L_0 en O_1 en utilisant les transformations quadratiques

$$T_1 = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2x_3 & x_1x_3 & x_3x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2x_4 & x_3x_4 & x_1x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

En appliquant la première, on fait correspondre au point infiniment voisin de O_1 sur la droite O_1O_3, le nouveau point $(1, 0, 0, 0)$ et en appliquant la seconde, on fait correspondre au point infiniment voisin de O_1 sur O_1O_4, le nouveau point $(1, 0, 0, 0)$. Par conséquent, si l'on effectue T_1^7, on fait correspondre au point $(\alpha, 7)$ le point $(1, 0, 0, 0)$. L'opération T_1T_2 fait apparaître le point $(\alpha, 1, 1)$ et l'opération T_2^4 le point $(\beta, 4)$.

Effectuons l'opération T_1T_2 sur l'équation de F et sur celle des surfaces (1). En n'écrivant que les termes qui nous sont nécessaires, on a

$$a_{01}x_1^{40}x_2 + \ldots + a_{11}x_1^{37}x_3^2x_4^2 + \ldots = 0,$$
$$x_1^{20}(\lambda_3x_3 + \lambda_4x_4) + \ldots = 0.$$

On trouve que la transformée de la courbe L_0 passe simplement par le point $(1, 0, 0, 0)$ ou $(\alpha, 1, 1)$ en y touchant la droite

$$x_2 = 0, \qquad \lambda_3x_3 + \lambda_4x_4 = 0.$$

Effectuons maintenant sur les mêmes surfaces l'opération T_1^2, c'est-à-dire

$$(x_1^5 \quad x_2x_4^4 \quad x_3x_4^4 \quad x_1^4x^4)\,;$$

nous obtenons

$$a_{01}x_1^{50}x_2 + \ldots + a_{11}x_1^{28}x_3^2x_4^5 + \ldots = 0,$$
$$x_1^{28}(\lambda_4x_3 + \lambda_7x_4) + \ldots = 0.$$

La transformée de la courbe L_0 passe donc simplement par le point $(1, 0, 0, 0)$ ou $(\beta, 4)$ en y touchant la droite

$$x_2 = 0, \qquad \lambda_4x_3 + \lambda_7x_4 = 0.$$

5. Nous allons maintenant prendre pour système $|C_0|$ le système découpé sur F par les surfaces d'ordre treize transformées en elles-mêmes par H et ne passant pas par les points unis de l'homographie. L'équation de cette surface, en appliquant le procédé donné plus haut, est

$$\begin{aligned}\lambda_{01}x_1^{13} + \lambda_{02}x_2^{13} + \lambda_{03}x_3^{13} + \lambda_{04}x_4^{13} + \lambda'_{01}x_1^9x_3^3x_2 + \lambda'_{02}x_2^9x_1^3x_3 \\ + \lambda'_{03}x_3^9x_2^3x_1 + x_4(\lambda_{11}x_1^7x_2^5 + \lambda_{12}x_2^7x_3^5 + \lambda_{13}x_3^7x_1^5) \\ + x_4^2(\lambda_{20}x_1^{10}x_2 + \lambda_{21}x_2^{10}x_3 + \lambda_{23}x_3^{10}x_1) + (x_1x_2x_3x_4)^2(\lambda'_{21}x_1^4x_2 \\ + \lambda'_{22}x_2^4x_3 + \lambda'_{23}x_3^4x_1) + x_4^3(\lambda_{31}x_1^8x_3^2 + \lambda_{32}x_2^8x_1^2 + \lambda_{33}x_3^8x_2^2) \\ + x_1x_2x_3x_4^3(\lambda'_{31}x_1^4x_2^3 + \lambda'_{32}x_2^4x_3^3 + \lambda'_{33}x_3^4x_1^3) + x_1x_2x_3x_4^5(\lambda_{51}x_1^4x_3 \\ + \lambda_{52}x_2^4x_1 + \lambda_{53}x_3^4x_2) + x_4^6(\lambda_{61}x_1^4x_2^3 + \lambda_{62}x_2^4x_3^3 + \lambda_{63}x_3^4x_1^3) \\ + x_4^8(\lambda_{81}x_1^4x_3 + \lambda_{82}x_2^4x_1 + \lambda_{83}x_3^4x_2) = 0.\end{aligned}$$

Nous continuerons à désigner par Φ la surface dont les sections hyperplanes correspondent aux nouvelles courbes C_0 qui viennent d'être définies. Nous devons cependant nous limiter aux surfaces qui ne contiennent pas F. Il suffit pour cela de supprimer dans l'équation précédente les termes contenant x_4 à une puissance supérieure ou égale à 13, c'est-à-dire actuellement le terme en x_4^{11} $(\lambda_{04} = 0)$.

La surface Φ appartient à un espace S_{29} à 29 dimensions, dans lequel elle est normale. Elle est d'ordre 13.11 = 143.

6. Une courbe L_0 rencontre une courbe C_0 en 13.11.7 points, donc sur la surface Φ, les courbes L' sont d'ordre 77.

Appelons σ'_α, τ'_α, σ'_β les courbes rationnelles équivalentes au point de diramation O'_1, σ''_α, τ''_α, σ''_β celles qui sont équivalentes au point O'_2, σ'''_α, τ'''_α, σ'''_β celles qui sont équivalentes au point O'_3. Nous avons une relation de la forme

$$7\Gamma \equiv 13L' + \lambda'_0\sigma'_\alpha + \lambda'_1\tau'_\alpha + \lambda'_2\sigma'_\beta + \lambda''_0\sigma''_\alpha + \ldots + \lambda'''_2\sigma'''_\beta.$$

Exprimons que les courbes L' rencontrent en un point chacune des courbes τ'_α, σ'_β mais ne rencontrent pas la courbe σ'_α. On a

$$\lambda'_1 - 2\lambda'_0 = 0, \qquad 13 + \lambda'_0 - 3\lambda'_2 + \lambda'_2 = 0,$$
$$13 + \lambda'_1 - 3\lambda'_2 = 0,$$

d'où $\lambda'_0 = 4$, $\lambda'_1 = 8$, $\lambda'_2 = 7$. On obtient des résultats analogues pour les λ'', λ''' et si nous posons

$$\Sigma\sigma_\alpha = \sigma'_\alpha + \sigma''_\alpha + \sigma'''_\alpha, \qquad \Sigma\tau_\alpha = \tau'_\alpha + \tau''_\alpha + \tau'''_\alpha,$$
$$\Sigma\sigma_\beta = \sigma'_\beta + \sigma''_\beta + \sigma'''_\beta,$$

nous avons

$$7\Gamma \equiv 13L' + 4\Sigma\sigma_\alpha + 8\Sigma\tau_\alpha + 7\Sigma\sigma_\beta. \tag{1}$$

Comme vérification, on trouve bien que le degré de $|L'|$ est $p'^{(1)} - 1 = 38$.

7. Désignons par K_0 la section de F par le plan $x_4 = 0$ et par K'_0 la courbe qui lui correspond sur Φ. Cette courbe K'_0 est d'ordre onze.

La courbe K_0 passe simplement par les points O_1, O_2, O_3 en y touchant respectivement les droites O_1O_3, O_2O_1, O_3O_2. Sur cette courbe, le point O_1 par exemple est l'origine d'une branche linéaire et la courbe passe par conséquent par les points $(\alpha, 1)$ $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, 7)$. Elle a des comportements analogues en O_2, O_3. Il en résulte que la courbe K'_0 rencontre en un point chacune des courbes σ'_α, σ''_α, σ'''_α mais ne rencontre pas les autres composantes des points O'_1, O'_2, O'_3. On a donc une relation fonctionnelle

$$\Gamma \equiv 13K'_0 + 8\Sigma\sigma_\alpha + 3\Sigma\tau_\alpha + \Sigma\sigma_\beta. \tag{II}$$

La courbe K_0 est de genre 45, par conséquent, en utilisant la formule de Zeuthen, la courbe K' a le genre trois.

D'autre part, on a

$$[\Gamma, K'_0] = 11 = 13[K'_0, K'_0] + 3.8,$$

d'où $[K'_0, K'_0] = -1$. La courbe K'_0 est de degré virtuel -1.

8. La surface

$$x_1x_2x_3 + \lambda x_4^3 = 0 \tag{2}$$

est transformée en soi par l'homographie H ; elle coupe F suivant une courbe K engendrant un faisceau linéaire $|K|$. A ces courbes correspondent sur Φ des courbes K' d'ordre 33.

Nous allons voir que les courbes K ont un point triple en O_1 et passent deux fois par le point $(\alpha, 1)$, une fois par le point $(\alpha, 1, 1)$ et par les points $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 3)$, ..., $(\alpha, 7)$.

Appliquons à la surface (2) la transformation T_1T_2, nous obtenons

$$x_1^3x_2 + \lambda x_3x_4^3 = 0.$$

D'autre part, la transformée de la surface F est

$$a_1x_1^{40}x_2 + \ldots + a_{11}x_1^{37}x_3^2x_4^2 + \ldots = 0.$$

La transformée de la courbe K appartient à la surface

$$-a_{01}x_1^{37}\lambda x_3 + a_{11}x_1^{37}x_4 + \ldots = 0.$$

Cette transformée passe donc simplement par le point (1, 0, 0, 0) ou (α, 1, 1), en y touchant la droite

$$x_2 = 0, \qquad a_{01}\lambda x_3 - a_{11}x_4 = 0.$$

Effectuons maintenant sur la surface F et la surface (2) la transformation T_1^7, c'est-à-dire la transformation

$$(x_1^8 \quad x_2x_3^7 \quad x_1^7x_3 \quad x_3^7x_4)$$

de manière à mettre en évidence le point (α, 7). Nous trouvons respectivement

$$a_0x_1^{80}x_2 + \ldots + a_{03}x_1^{78}x_3^3 + a_{11}x_1^{78}x_3^2x_4 + \ldots = 0,$$
$$x_1^{15}x_2 + \lambda x_3^{13}x_4^3 = 0.$$

La transformée de la courbe K appartient à la surface

$$a_{01}x_1^{65}x_0^{11}x_4^3 + \ldots + x_1^{78}(a_{03}x_3 + a_{11}x_4) + \ldots = 0.$$

On en conclut que cette transformée passe simplement par le point (1, 0, 0, 0) ou (α, 7) en y touchant la droite

$$x_2 = 0, \qquad a_{03}x_3 + a_{10}x_4 = 0,$$

qui reste fixe lorsque λ varie.

Les courbes K passent simplement par les points (α, 1, 1) et (α, 7), donc elles passent simplement par les points (α, 6), ..., (α, 2), deux fois par le point (α, 1) et enfin trois fois par le point O_1. Il en résulte que les courbes K' rencontrent en un point chacune des courbes σ'_α, σ''_α, σ'''_α et chacune des courbes τ'_α, τ''_α, τ'''_α, ces trois derniers points étant fixes.

Les courbes K sont de genre $3 \cdot 45 + 3 \cdot 11 - 2 - 3 \cdot 4 = 154$, donc d'après la formule de Zeuthen, les courbes K' sont de genre neuf.

Les courbes K satisfont à la relation fonctionnelle

$$3\Gamma \quad 13K' + 11\Sigma\sigma_\alpha + 9\Sigma\tau_\alpha + 3\Sigma\sigma_\beta. \tag{III}$$

On vérifie que le système |K'| est bien de degré trois, les points-base appartenant un à chacun des courbes σ'_α, σ''_α, σ'''_α.

9. En comparant les relations fonctionnelles (I), (II), (III), on voit que l'on a

$$7\Gamma \equiv 13(K_0' + 2K') + 30\Sigma\sigma_\alpha + 21\Sigma\tau_\alpha + 7\Sigma\sigma_\beta.$$

On en conclut

$$L' \equiv K_0' + 2K' + 2\Sigma\sigma_\alpha + \Sigma\tau_\alpha.$$

Dans le système canonique de la surface Φ, de genres $p_a = p_g = 9$, on a une double infinité de courbes comprenant comme parties fixes une courbe K_0' de genre trois et de degré virtuel -1, les courbes rationnelles σ_α', σ_α'', σ_α''' de degré virtuel -2 comptées chacune deux fois et τ_α', τ_α'', τ_α''' de degré virtuel -3, et comme parties variables deux courbes d'un faisceau $|K'|$ de genre neuf et de degré trois, les trois points-base appartenant un à chacune des courbes σ_α', σ_α'', σ_α'''.

En rapportant projectivement les courbes canoniques L' aux hyperplans d'un espace linéaire S_8 à huit dimensions, on obtient comme modèle projectif de la surface Φ une surface projectivement canonique d'ordre 38, contenant :

trois droites τ_α', τ_α'', τ_α''', de degré virtuel -3,

trois droites σ_β', σ_β'', σ_β''' de degré virtuel -3, chacune de ces droites rencontrant la droite τ_α de même indice en un point,

une courbe K_0' d'ordre cinq, de genre trois, et de degré virtuel -1,

un faisceau de courbes $|K'|$ de genre neuf et de degré trois.

La surface possède trois points doubles coniques respectivement équivalents aux courbes rationnelles de degré virtuel -2, σ_α', σ_α'', σ_α'''.

Les hyperplans passant par la courbe K_0' et par les droites τ_α', τ_α'', τ_α''' du modèle projectivement canonique de la surface Φ découpent sur cette surface des couples de courbes K'. On en conclut que la courbe K_0' appartient à un plan. Celui-ci passe par les trois points doubles de la surface.

Les courbes K' passent également par ces trois points doubles.

10. Terminons par une remarque. Entre le genre arithmétique p_a d'une surface et celui p_a' de la surface image d'une involution cyclique d'ordre premier appartenant à la première surface et n'ayant qu'un nombre fini de points unis, on a une relation

$$12(p_a + 1) = 12p(p'_a + 1) + X,$$

X provenant de la présence de points unis.

Actuellement, on a $p_a = 120$, $p'_a = 9$ et si on désigne par N l'influence de chacun des points O_1, O_2, O_3, qui sont de même structure, il vient

$$12 \cdot 121 = 12 \cdot 13 \cdot 10 + 3N,$$

d'où $N = 36$.

Liège, le 19 juillet 1961.