Bulletin de la Classe des sciences

Sur les surfaces dont une arête du quadrilatère de Demoulin engendre une congruence W

Lucien Godeaux

Résumé
On démontre que si une arête du quadrilatère gauche de Demoulin attaché à une surface engendre une congruence W, les asymptotiques des surfaces focales correspondent à celles de la surface.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur les surfaces dont une arête du quadrilatère de Demoulin engendre une congruence W,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On démontre que si une arête du quadrilatère gauche de Demoulin attaché à une surface engendre une congruence W, les asymptotiques des surfaces focales correspondent à celles de la surface.

On sait que l'enveloppe des quadriques de Lie attachées à une surface (x) se compose de cette surface et de quatre nappes engendrées par les sommets du quadrilatère gauche de Demoulin associé à la surface, mais en général, les asymptotiques de ces quatre nappes ne correspondent pas à celles de la surface (x). Lorsque cette correspondance a lieu, les arêtes du quadrilatère de Demoulin engendrent des congruences W. On peut se demander s'il est possible qu'une arête du quadrilatère de Demoulin engendre une congruence W sans que les asymptotiques des surfaces focales correspondent à celles de la surface (x). La réponse est négative et s'établit d'ailleurs facilement, mais il nous a paru qu'il convenait de le démontrer.

Nous utilisons dans cette note les notations d'un travail antérieur [1] sans les définir à nouveau, pour ne pas allonger outre mesure cette note.

Nous supposerons distincts les points caractéristiques de la quadrique de Lie Φ, c'est-à-dire les sommets du quadrilatère de Demoulin. On sait en effet que si les points caractéristiques en question ne sont pas distincts, les quatre nappes de l'enveloppe de Φ distinctes de (x) ont pour asymptotiques celles, u, v, de la surface (x). Le problème envisagé ici ne se pose pas.

[1] *Surfaces dont les quadriques de Lie touchent une ou deux droites* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROY. DE BELGIQUE, 1960, pp. 733-742). Voir aussi notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé*, Act. scient., N° 138 (Paris, Hermann, 1934).

Les points caractéristiques de la quadrique de Lie sont

$$p_1 = \xi\eta x - \eta m - \xi n - y,$$

$$p_2 = \xi\eta x - \eta m + \xi n - y,$$

$$p_3 = \xi\eta x + \eta m - \xi n - y,$$

$$p_4 = \xi\eta x + \eta m + \xi n - y.$$

L'équation différentielle des asymptotiques de la surface (p_1) est [1]

$$\begin{gathered}\xi(h_1 + \eta^{10}) (\log.\, a\xi)^{10}du^2 + \eta(k_1 + \xi^{01}) (\log.\, b\eta)^{01}dv^2 \\ + [\xi\eta\, (\log.\, a\xi)^{10} (\log.\, b\eta)^{01} + (h_1 + \eta^{10})(k_1 + \xi^{01}) \\ - 4ab\xi\eta]dudv = 0.\end{gathered} \tag{1}$$

Supposons que la droite p_1p_2 engendre une congruence W. Alors, il y a conservation des asymptotiques sur les nappes focales (p_1), (p_2) et l'équation (1) doit être identique à celle des asymptotiques de la surface (p_2). Or, on passe de p_1 à p_2 en changeant ξ en $-\xi$, donc l'équation différentielle des asymptotiques de (p_2) est

$$\begin{gathered}- \xi(h_1 + \eta^{10}) (\log.\, a\xi)^{10}du^2 + \eta(k_1 - \xi^{01}) (\log.\, b\eta)^{01}dv^2 \\ + [- \xi\eta\, (\log.\, a\xi)^{10} (\log.\, b\eta)^{01} + (h_1 + \eta^{10})(k_1 - \xi^{01}) \\ + 4ab\xi\eta]dudv = 0\end{gathered} \tag{2}$$

et cette équation doit être identique à (1).

Par addition et soustraction des équations (1) et (2), on trouve

$$\eta k_1\, (\log. b\eta)^{01}dv^2 + k_1(h_1 + \eta^{10})dudv = 0,$$

$$\xi(h_1 + \eta^{10})\, (\log.\, a\xi)^{10}du^2 + \eta\xi^{01}\, (\log.\, b\eta)^{01}dv^2$$

$$+ [\xi\eta\, (\log.\, a\xi)^{10}\, (\log.\, b\eta)^{01} + \xi^{01}(h_1 + \eta^{10}) - 4ab\xi\eta]dudv = 0$$

et ces équations doivent être identiques. On a donc

$$\xi(h_1 + \eta^{10})\, (\log a\xi)^{10} = 0.$$

([2]) Une faute d'impression s'est glissée dans la formule ([1]), p. 736, de la note citée plus haut. Le dernier terme de la seconde ligne est $-4ab\,\xi\eta$.

ξ ne peut être nul, car alors les points p_1 et p_2 seraient confondus, de même que les points p_3 et p_4. On aurait d'ailleurs $(\log. b\eta)^{01} = 0$.

$h_1 + \eta^{10}$ ne peut être nul, car on aurait

$$k_1[\eta + (\log. bk_1)^{01}] = \eta(k_1 + \eta^{10})$$

et si $h + \eta^{10}$ était nul, p_1 coïnciderait avec p_3 et p_2 avec p_4.

On a donc $(\log. a\xi)^{10} = 0$, ce qui entraîne $(\log. b\eta)^{01} = 0$. Ce sont précisément les conditions nécessaires et suffisantes pour que les asymptotiques soient conservées sur les cinq nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie.

Si une arête du quadrilatère gauche de Demoulin engendre une congruence W, il y a conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie de la surface.

Liège, le 1er novembre 1961.