Bulletin de la Classe des sciences

Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique zéro dont le système bicanonique est irréductible (4e communication)

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination complète des surfaces algébriques de genres pa = pg = O possédant un système bicanonique irréductible.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique zéro dont le système bicanonique est irréductible,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Quatrième communication).

Résumé. — Détermination complète des surfaces algébriques de genres $p_a = p_g = 0$ possédant un système bicanonique irréductible.

Dans les communications précédentes (1), nous sommes arrivé au résultat suivant : Si une surface algébrique F de genres $p_a = p_g = 0$ possède un système bicanonique irréductible, de dimension $P_2 - 1 \geqslant 2$, elle contient deux systèmes linéaires réguliers $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ tels que si $|C_3|$, $|C_4|$, $|C_5|$, ... sont les systèmes tricanonique, tétracanonique, pentacanonique, ... de la surface, on a

$$|C_3| = |\Gamma_1 + \Gamma_2|, \quad |C_4| = |\Gamma_1 + \Gamma_2'| = |\Gamma_2 + \Gamma_1'|,$$
$$|C_5| = |\Gamma_1' + \Gamma_2'|, \ldots.$$

Il restait à déterminer le système bicanonique de la surface. Dans nos premières communications, nous avions cru pouvoir établir que Γ_1 était une courbe isolée et que les courbes Γ_2 étaient les adjointes à cette courbe, théorème que nous avions établi dans

(1) Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1959, pp. 362-372 ; 1960, pp. 47-52, 743-747. Voir aussi nos travaux *Sulle superficie algebriche di genere zero con un sistema bicanonico irriducibile* (Atti del sesto Congresso dell' Unione Matematica Italiana, Napoli, 1959, pp. 408-410) ; *Sur les surfaces de genre nul possédant des courbes bicanoniques irréductibles* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1958, pp. 221-230) ; *Quelques résultats sur les surfaces de genre zéro possédant des courbes bicanoniques irréductibles* (Troisième Colloque de Géométrie algébrique du C.B.R.M. tenu à Bruxelles en 1959. Louvain, 1960).

le cas $P_2 = 3$ par une autre méthode [1]. Notre démonstration, dans le cas $P_2 \geqslant 4$, laissait subsister un doute et nous avons repris la question. Nous établissons d'une manière rigoureuse la propriété précédente. D'une manière précise, nous démontrons le théorème suivant :

Si une surface algébrique F *de genres* $p_a = p_g = 0$ *possède un système bicanonique irréductible de dimension* $P_2 - 1 \geqslant 2$, *il existe sur la surface une courbe isolée* Γ *de genre* P_2, *telle que les systèmes bicanonique, tricanonique, tétracanonique, ... soient*

$$|C_2| = |2\Gamma|, \quad |C_3| = |\Gamma + \Gamma'|, \quad |C_4| = |2\Gamma'|, \ldots$$

Cette surface est l'image d'une involution du second ordre privée de points unis appartenant à une surface régulière possédant une courbe canonique isolée de genre $2P_2 - 1$.

Il est curieux de constater que ce théorème ne s'applique pas aux cas où l'on a $P_2 = 1$ [2] et $P_2 = 2$ [3] que nous avons déterminés antérieurement.

Ainsi se trouve résolu un problème posé depuis que Castelnuovo a donné, en 1894, les conditions de rationnalité d'une surface algébrique ($p_a = P_2 = 0$) et dont on ne connaissait jusqu'à présent que quelques solutions particulières [4]. Ajoutons que des surfaces de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = 3, 4, \ldots, 7$ ont été construites récemment par M. Burniat, par des méthodes totalement différentes [5].

---

[1] *Sur les surfaces de genres zéro possédant un réseau de courbes bicanoniques irréductibles* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1959, pp. 52-68, 188-196).

[2] *Sur les surfaces algébriques de genres arithmétique et géométrique nuls possédant une courbe bicanonique effective* (Bulletin de l'Acad. roy. de Belgique, 1958, pp. 809-819) ; *Sulle superficie di genere zero e di bigenere uno* (Bollettino dell' Unione Matematica Italiana, 1958, pp. 531-536).

[3] *Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique nuls possédant un faisceau de courbes bicanoniques irréductibles* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1958, pp. 739-749, 942-944) ; *Sulle superficie di genere* $p_a = p_g = 0$ *con un fascio di curve bicanoniche irriducibile* (Convegno di Geometria algebrica di Taormina, 1959, sous presse).

[4] Pour la bibliographie antérieure à 1934, voir notre opuscule sur *Les surfaces non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls*. Actualités scient. N° 123 (Paris, Hermann, 1934).

[5] P. Burniat, *Surfaces algébriques régulières de genre géométrique* $p_g = 0, 1, 2, 3$ *et de genre linéaire* $p^{(1)} = 3, 4, \ldots, 8p_g + 7$ (Troisième Colloque de Géométrie algébrique du C.B.R.M. tenu a Bruxelles en 1959. Louvain, 1960).

1. Soit F une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$ possédant un système bicanonique $|C_2|$ irréductible. Nous désignerons par π le genre linéaire $p^{(1)}$ de la surface. Le système $|C_2|$ a la dimension $\pi - 1$ et on a $P_2 = \pi$. Nous supposerons $\pi > 2$.

Nous avons démontré dans les notes précédentes qu'il existe sur la surface F deux systèmes linéaires réguliers $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$, irréductibles, tels que si l'on désigne par $|C_3|$, $|C_4|$, $|C_5|$, ... les systèmes tricanonique, tétracanonique, pentacanonique, ... de la surface, on a

$$|C_3| = |\Gamma_1 + \Gamma_2|, \quad |C_4| = |\Gamma_1 + \Gamma_2'| = |\Gamma_2 + \Gamma_1'|,$$
$$|C_5| = |\Gamma_1' + \Gamma_2'|, \ \ldots$$

Nous désignerons par n_1, π_1, r_1 les degré, genre et dimension du système $|\Gamma_1|$ et par n_2, π_2, r_2 les caractères analogues de $|\Gamma_2|$. Nous supposerons $\pi_1 \leq \pi_2$.

Rappelons tout d'abord les résultats obtenus dans la seconde communication.

Le nombre des points d'intersection d'une courbe Γ_1 et d'une courbe Γ_2 est nécessairement pair. Nous le représenterons par $2n$.

Nous avons

$$n_1 + n_2 + 4n = 9(\pi - 1), \tag{1}$$

$$\pi_1 - 1 + \pi_2 - 1 + 2n = 6(\pi - 1). \tag{2}$$

D'autre part, $|\Gamma_1|$ et $|\Gamma_2|$ étant réguliers, on a

$$r_1 = n_1 - (\pi_1 - 1), \quad r_2 = n_2 - (\pi_2 - 1),$$

d'où

$$n_1 \geqslant \pi_1 - 1, \quad n_2 \geqslant \pi_2 - 1,$$

$$r_1 + r_2 + 2n = 3(\pi - 1). \tag{3}$$

Nous avons les relations

$$2n_1 + n = 3(\pi_1 - 1), \quad 2n_2 + n = 3(\pi_2 - 1). \tag{4}$$

Les courbes tricanoniques C_3 découpent sur les courbes Γ_1, Γ_2 des séries linéaires complètes non spéciales

$$g^{2n+n_1-\pi_1}_{2n+n_1}, \qquad g^{2n+n_2-\pi_2}_{2n+n_2}.$$

Les courbes Γ_1, Γ_2 découpent sur une courbe C_2 des séries linéaires complètes d'indices de spécialité respectifs r_2+1, r_1+1,

$$g^{n+\pi_1-1-3(\pi-1)+r_2}_{n+\pi_1-1}, \qquad g^{n+\pi_2-1-3(\pi-1)+r_1}_{n+\pi_2-1}.$$

On a donc

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= n+\pi_1-1-3(\pi-1)+r_2, \\ r_2 &= n+\pi_2-1-3(\pi-1)+r_1. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

2. Nous allons établir quelques inégalités déduites des propriétés précédentes.

Des relations (4), on tire

$$\pi_1-1-n=2r_1, \qquad \pi_2-1-n=2r_2, \qquad (6)$$

donc $n \leqslant \pi_1-1$, $n \leqslant \pi_2-1$.

Le degré n_1 de $|\Gamma_1|$ ne peut être supérieur ou égal à $2\pi_1-2$, sans quoi la surface F serait rationnelle ou, dans le cas de l'égalité, aurait une courbe bicanonique d'ordre zéro ($P_2=1$ au lieu de $P_2 \geqslant 3$). Cela étant, on a

$$n_1 < 2\pi_1-2, \quad n_1-(\pi_1-1) < \pi_1-1, \quad r_1 < \pi_1-1,$$

et de même, $r_2 < \pi_2-1$.

Nous avons supposé $\pi_1 \leqslant \pi_2$. Les relations (4) donnent

$$2(n_2-n_1) = 3(\pi_2-\pi_1),$$

d'où $n_2 \geqslant n_1$.

Enfin, les relations (6) donnent

$$2(r_2-r_1) = \pi_2-\pi_1,$$

d'où $r_2 \geqslant r_1$.

En résumé, on a

$$r_1 < \pi_1-1 \leqslant n_1, \qquad r_2 < \pi_2-1 \leqslant n_2,$$

$$r_1 \leqslant r_2, \; n_1 \leqslant n_2, \qquad \pi_1 \leqslant \pi_2, \; n \leqslant \pi_1-1.$$

Les relations (6) donnent

$$r_2 - r_1 = 3(\pi - 1) - (n + \pi_1 - 1),$$
$$r_2 - r_1 = n + \pi_2 - 1 - 3(\pi - 1),$$

d'où

$$n + \pi_1 - 1 \leqslant 3(\pi - 1) \leqslant n + \pi_2 - 1. \tag{7}$$

3. Les courbes C_3 donnent sur une courbe Γ_1 une série linéaire complète non spéciale d'ordre $n_1 + 2n$ et de dimension $n_1 + 2n - \pi_1$.

Les courbes C_3 passant par un groupe de cette série forment une série complète d'ordre $2n$ et de dimension

$$3(\pi - 1) - [n_1 + 2n - (\pi_1 - 1)]$$
$$= r_1 + r_2 - n_1 + \pi_1 - 1 = r_2.$$

On en conclut que les courbes Γ_2 découpent, sur une courbe Γ_1, une série complète.

Si cette série n'est pas spéciale, on a $r_2 = 2n - (\pi_1 - 1)$ et, puisque $r_2 \geqslant r_1$, $2n \geqslant n_1$.

Si la série est spéciale, l'indice de spécialité i est donné par

$$2n - (\pi_1 - 1) + i = r_2.$$

On a $i \geqslant n_1 - 2n$.

4. Considérons maintenant la série découpée par les courbes Γ_1' sur C_2, série complète puisque $C_4 = \Gamma_1' + \Gamma_2$.

L'ordre de cette série, en tenant compte de la relation (2) est

$$2(\pi - 1) + n + \pi_1 - 1.$$

Les courbes C_4 découpent sur une courbe Γ_2 une série complète d'ordre $2n + 2(\pi_2 - 1)$ certainement non spéciale et par conséquent de dimension $2n + \pi_2 - 2$. La dimension du système des courbes C_4 contenant une courbe Γ_2 est, en tenant compte de la relation (2),

$$6(\pi - 1) - 2n - (\pi_2 - 1) = \pi_1 - 1.$$

Puisqu'une courbe Γ_1' ne peut contenir une courbe Γ_1, la dimension de $|\Gamma_1'|$ est $\pi_1 - 1$ et les courbes Γ_1' découpent, sur une courbe C_2, une série complète.

Si la série découpée sur une courbe C_2 par les courbes Γ_1' est non spéciale, on a

$$2(\pi - 1) + n + \pi_1 - 1 - 3(\pi - 1) - 1 = \pi_1 - 1,$$

c'est-à-dire $n = \pi$. Si au contraire la série est spéciale et si son indice de spécialité est i, on a $i = \pi - n$, donc $n \leqslant \pi - 1$.

5. La série caractéristique $|(\overline{C}_2, C_2)|$ du système $|C_2|$ sur une courbe $\overline{C}_2$ est certainement non spéciale puisque $p_g = 0$. Elle est d'ordre $4(\pi - 1)$ et sa dimension est égale à $\pi - 2$.

Considérons sur la courbe $\overline{C}_2$ une série d'ordre $4(\pi - 1)$ distincte de la série caractéristique et soit i son indice de spécialité. Les séries de cette nature sont en nombre $\infty^{3(\pi-1)}$ et par conséquent les groupes de $4(\pi - 1)$ points de ces séries dépendent de $3(\pi - 1) + \pi - 2 + i$ paramètres. D'autre part, les groupes de $4(\pi - 1)$ points de $\overline{C}_2$ sont en nombre $\infty^{4(\pi-1)}$ et on doit donc avoir

$$3(\pi - 1) + \pi - 2 + i = 4(\pi - 1),$$

d'où $i = 1$.

Cela étant, considérons sur $\overline{C}_2$ une série $g^{\pi-1}_{4(\pi-1)}$ spéciale. Les groupes de la série canonique de $\overline{C}_2$ contenant les groupes de la série considérée sont complétés par des groupes de $2(\pi - 1)$ points. Mais puisque l'indice de spécialité de la série est $i = l$, ces groupes sont réunis en un seul, dont l'indice de spécialité est π.

6. Considérons les groupes (C_2, Γ_1) de $n + \pi_1 - 1$ points. Sur une courbe Γ_1, ces groupes forment une série qui peut être spéciale puisque $n + \pi_1 - 1 \leqslant 2(\pi_1 - 1)$. Soit j son indice de spécialité. Par un groupe (Γ_1, C_2) passent donc ∞^{j-1} courbes Γ_1'. Considérons maintenant un de ces groupes sur une courbe $\overline{C}_2$. Il y a donc ∞^{j-1} courbes Γ_1' passant par un groupe $(\overline{C}_2, \Gamma_1)$ et coupant encore $\overline{C}_2$ suivant ∞^{j-1} groupes de $2(\pi - 1)$ points,

formant une série linéaire. Nous venons de voir que cette série se réduit à un seul groupe, donc on a $j = 1$.

Par un groupe (C_2, Γ_1) passe donc une courbe Γ_1' et les courbes C_2 découpent sur une courbe Γ_1 une série d'ordre $n + \pi_1 - 1$ et de dimension n puisque $j = 1$. La série découpée par les courbes C_2 est complète. Une courbe C_2 détermine un groupe de cette série et par ce groupe passe une seule courbe Γ_1'. Les systèmes $|C_2|$ et $|\Gamma_1'|$ ayant respectivement les dimensions $\pi - 1$ et $\pi_1 - 1$, on a $\pi \geqslant \pi_1$.

On a $n \leqslant \pi_1 - 1 \leqslant \pi - 1$, donc $n \leqslant \pi - 1$,

$$n + \pi_1 - 1 \leqslant 2(\pi - 1). \tag{8}$$

La seconde partie de la double inégalité (7) est donc vérifiée. De la première des relations (5), on déduit

$$r_2 \geqslant r_1 + \pi - 1. \tag{9}$$

La seconde des relations (5) donne alors

$$n + \pi_2 - 1 \geqslant 4(\pi - 1). \tag{10}$$

7. Remarquons que l'on a $n \leqslant \pi - 1$, donc la série découpée par les courbes Γ_1' sur une courbe C_2 est spéciale, car dans le cas opposé, on aurait $n = \pi$.

D'ailleurs, sur une courbe $\overline{C}_2$, le groupe $(\Gamma_1', \overline{C}_2)$, d'ordre

$$2(\pi - 1) + n + \pi_1 - 1 \leqslant 4(\pi - 1),$$

appartient au moins à un groupe G de $4(\pi - 1)$ points. Si le groupe G appartenait à la série caractéristique, il passerait par le groupe $(\Gamma_1', \overline{C}_2)$ au moins ∞^1 courbes C_2 et l'une d'elles contiendrait la courbe Γ_1' comme partie. On aurait alors

$$C_2 = \Gamma_1' + H, \qquad C_3 = \Gamma_1'' + H = C_2 + \Gamma_1 + H$$

et la courbe $\Gamma_1 + H$ serait une courbe canonique de la surface, contrairement à l'hypothèse $p_g = 0$.

Les groupes G sont donc spéciaux et la série découpée par les courbes Γ_1 sur une courbe C_2 est spéciale.

8. Considérons la série $|(\Gamma_2', \overline{C}_2)|$ découpée par les courbes Γ_2' sur une courbe $\overline{C}_2$ de $|C_2|$. En utilisant la relation (2), on trouve qu'elle est d'ordre

$$2(\pi - 1) + n + \pi_2 - 1$$

au moins égal à $6(\pi - 1)$ en vertu de l'inégalité (10).

Si cette série n'est pas spéciale, elle a d'une part la dimension $\pi_2 - 1$ et d'autre part la dimension

$$n + \pi_2 - 1 - (\pi - 1) - 1.$$

On en déduit $n = \pi$, ce qui est impossible comme on vient de le prouver. La série considérée est donc spéciale et son ordre est nécessairement $6(\pi - 1)$; elle coïncide avec la série canonique de la courbe $\overline{C}_2$ et a donc l'indice de spécialité un. On a

$$n + \pi_2 - 1 = 4(\pi - 1).$$

La dimension de cette série est d'une part $3(\pi - 1)$ et d'autre part $\pi_2 - 1$. On a donc

$$\pi_2 - 1 = 3(\pi - 1), \quad n = \pi - 1.$$

Nous avons trouvé $n \leq \pi_1 - 1 \leq \pi - 1$, donc $\pi_1 = \pi$ et l'inégalité (8) devient une égalité.

Les courbes Γ_2 découpent sur une courbe Γ_1 de genre $\pi_1 = \pi$, une série linéaire complète d'ordre $2n = 2(\pi - 1)$, qui est soit la série canonique, soit une série paracanonique. Dans ce dernier cas, sa dimension est $r_2 = \pi - 2$. Mais alors, l'inégalité (9) donne $r_1 = -1$, ce qui est absurde. La série considérée est donc la série canonique et on a $r_2 = \pi - 1$, d'où $r_1 = 0$. La courbe Γ_1 est donc isolée.

Des relations donnant r_1, r_2, on déduit $n_1 = \pi - 1$, $n_2 = 4(\pi - 1)$.

En résumé, nous avons

$$n_1 = \pi - 1,\ \pi_1 = \pi,\ r_1 = 0,\ n = \pi - 1,$$

$$n_2 = 4(\pi - 1),\ \pi_2 = 3(\pi - 1) + 1,\ r_2 = \pi - 1.$$

Nous venons de voir que les courbes Γ_2 découpent sur la courbe Γ_1 la série canonique. De plus, les courbes C_2 découpent sur la courbe Γ_1 une série d'indice de spécialité un, d'ordre $n + \pi_1 - 1 = 2(\pi - 1)$, c'est-à-dire la série canonique.

Les courbes Γ_1', Γ_2 et C_2 découpent sur la courbe Γ_1 la série canonique complète.

9. Observons en premier lieu que le système $|C_2|$ ne peut coïncider avec un des systèmes $|\Gamma_1'|$, $|\Gamma_2|$.

Si l'on avait en effet $C_2 \equiv \Gamma_1'$, on aurait

$$C_3 = \Gamma_1'' = C_2 + \Gamma_1$$

et Γ_1 serait une courbe canonique de F contrairement à l'hypothèse $p_g = 0$.

De même, si l'on avait $C_2 \equiv \Gamma_2$, on aurait

$$C_3 = \Gamma_2' \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2, \quad \Gamma_2' - \Gamma_2 \equiv \Gamma_1$$

et de nouveau $p_g > 0$, contrairement à l'hypothèse.

Considérons un groupe canonique G de la courbe Γ_1. Par G passe une courbe Γ_1', une courbe Γ_2 et une courbe C_2, donc sur la courbe C_2, les courbes des systèmes $|\Gamma_1'|$, $|\Gamma_2|$ déterminent la même série linéaire spéciale. Lorsque G varie sur Γ_1, les courbes Γ_1', Γ_2, C_2 varient et on en conclut que quel que soit C_2, les séries $|(\Gamma_1', C)|$, $|(\Gamma_2, C)|$ coïncident.

Deux courbes Γ_1', Γ_2 déterminant sur les courbes du système $|C_2|$ des groupes équivalents, il résulte d'un théorème de M. Severi [1] que ces courbes sont équivalentes. En d'autres termes, les systèmes $|\Gamma_1'|$, $|\Gamma_2|$ coïncident et on a

$$\Gamma_2 \equiv \Gamma_1', \quad C_3 = \Gamma_1 + \Gamma_1', \quad C_4 = 2\Gamma_1', \ldots$$

On observera que la série caractéristique d'une courbe C_2 étant non spéciale, sur une courbe C_2 déterminée, les autres courbes C_2 et les courbes Γ_1' découpent des séries distinctes, ce qui confirme que $|C_2|$ ne peut coïncider avec $|\Gamma_1'|$ (ni avec $|\Gamma_2|$).

10. Il nous reste à déterminer le système bicanonique $|C_2|$ de la surface.

Nous avons

$$\Gamma_1'' = C_2 + \Gamma_1$$

et par conséquent

$$C_3 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_1', \quad C_4 = \Gamma_1 + \Gamma_1'' = 2\Gamma_1 + C_2.$$

(1) F. Severi, *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche* (Annali di Matematica, 3e série, tome XII, pp. 55-79). Voir N° 6.

On a $C_4 = 2C_2$, donc

$$|C_2| = |2\Gamma_1|.$$

Il existe donc sur la surface F une courbe Γ_1 isolée dont le double est une courbe bicanonique, bien qu'elle ne soit pas une courbe canonique, puisqu'elle n'appartient pas à son adjoint. Les courbes $2\Gamma_1$ découpent d'ailleurs sur la courbe Γ_1 une série paracanonique $g_{2\pi-2}^{\pi-2}$.

Nous avons montré, à la fin de notre première communication, que cette surface est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface régulière F′ possédant une seule courbe canonique de genre $2(\pi - 1) + 1$. Si l'on désigne par K, K_1, K_2 les courbes qui correspondent sur la surface F′ respectivement aux courbes Γ_1, Γ_1', C_2, la courbe K est la courbe canonique de F′, les courbes K_1, K_2 appartiennent au système bicanonique de F′, adjoint à la courbe K, les systèmes partiels $|K_1|$, $|K_2|$ étant composés au moyen de l'involution du second ordre.

Liège, le 4 décembre 1961.