Bulletin de la Classe des sciences

Relations entre les invariants de deux surfaces algébriques liées par une correspondance rationnelle

Lucien Godeaux

Résumé

On considère, sur une surface algébrique F, une involution cyclique d'ordre premier impair, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. On établit les relations qui existent entre les invariants de Zeuthen-Segre, les genres linéaires et les genres arithmétiques de la surface F et de la surface image de l'involution dans certains cas ; on indique un procédé permettant d'arriver au cas général.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Relations entre les invariants de deux surfaces algébriques liées par une correspondance rationnelle. In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 47, 1961. pp. 709-719;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1961.68184;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1961_num_47_1_68184;

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Relations entre les invariants de deux surfaces algébriques liées par une correspondance rationnelle,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On considère, sur une surface algébrique F, une involution cyclique d'ordre premier impair, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. On établit les relations qui existent entre les invariants de Zeuthen-Segre, les genres linéaires et les genres arithmétiques de la surface F et de la surface image de l'involution dans certains cas ; on indique un procédé permettant d'arriver au cas général.

Dans un travail déjà ancien (1), M. Severi a établi les relations liant les invariants de Zeuthen-Segre, les genres linéaires et les genres arithmétiques de deux surfaces algébriques F, F', liées par une correspondance algébrique (n, n'). Nous avons rencontré le même problème plus tard dans l'étude des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et n'ayant qu'un nombre fini de points unis, lorsque $n' = 1$ (2). Dans le mémoire de M. Severi, en nous limitant également au cas $n' = 1$, l'involution d'ordre n existant sur la surface F est supposée posséder des courbes unies. Le cas où l'involution ne possède que des points unis isolés pourrait se ramener à celui de M. Severi en remplaçant la surface F par une surface sur laquelle les points unis

(1) *Sulle relazioni che legano i caratteri invarianti di due superficie in corrispondenza algebrica* (Rendiconti del Istituto Lombardo, 1903, pp. 495-511).

(2) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.* Act. Scient., n° 270 (Paris, Hermann, 1935). *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'Académie royale de Belgique, 1952). *La théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége, 1957, pp. 3-15).

seraient remplacés par des courbes exceptionnelles, mais cela entraîne des calculs laborieux. Nous avons préféré reprendre le problème directement. Comme M. Severi, nous établissons d'abord la relation entre les invariants de Zeuthen-Segre J, J' des surfaces F, F', puis la relations entre les genres linéaires $p^{(1)}$, $p'^{(1)}$ de ces surfaces. La relation classique de Noether

$$p^{(1)} + J = 12\, p_a + 9$$

nous permet ensuite d'obtenir la relation entre les geners arithmétiques p_a, p'_a de F et F'.

Pour établir la relation entre J et J', on rencontre certaines difficultés dues à la structure parfois compliquée des points unis et des points de diramation correspondants sur la surface F', aussi dans cette note nous sommes-nous borné à ce que nous avons appelé des points unis de seconde espèce et de première catégorie. Voici ce que nous entendons par là. Supposons que nous prenions comme modèle projectif de F' une surface normale sur laquelle les points de diramation sont isolés. Un point de diramation de seconde espèce et de première catégorie (correspondant à un point uni analogue) est multiple pour la surface F' et le cône tangent en ce point à la surface se scinde en deux cônes rationnels, alors que le cône tangent en un point de diramation de seconde espèce peut aussi se scinder en trois ou quatre cônes rationnels.

On peut cependant arriver par une voie détournée à des résultats plus étendus. Les structures des points unis et des points de diramation correspondants sont indépendantes de la nature de la surface F. Si l'on suppose que celle-ci est un plan dans lequel l'involution est engendrée par une homographie cyclique non homologique, la surface F' est rationnelle. L'involution possède trois points unis. Si deux de ceux-ci sont de première catégorie, on peut en déduire l'influence du troisième sur la relation liant les genres arithmétiques des deux surfaces, puisque ceux-ci sont nuls. Le résultat obtenu est valable pour toutes les surfaces. C'est ce que nous montrons sur un exemple à la fin de cette note.

Nous n'avons pas considéré ici les points unis de première espèce, le résultat étant connu.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I, d'ordre premier impair p, n'ayant qu'un nombre fini de points unis. Soit T la transformation birationnelle de F en soi génératrice de l'involution. Nous désignerons par F' une surface image de l'involution.

Rappelons quelques résultats que nous avons obtenus et qui nous seront nécessaires dans la suite.

Sur la surface F, nous construisons un système linéaire $|C|$, transformé en soi par T, contenant p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I dont l'un, $|C_0|$, est dépourvu de points-base. Aux courbes C_0 correspondent sur la surface F' des courbes Γ formant un système linéaire complet. Si n est le degré de $|\Gamma|$ et π son genre, les courbes C ont le degré pn et le genre $p(\pi - 1) + 1$.

Soient A un point uni de seconde espèce de l'involution I et A' le point de diramation correspondant sur F'. Dans le faisceau des tangentes à la surface F en A, T détermine une homographie que l'on peut représenter par

$$\lambda' : \mu' = \epsilon\lambda : \epsilon^{\alpha}\mu, \qquad \lambda' : \mu' = \eta^{\beta}\lambda : \eta\mu, \tag{1}$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité et α, β deux entiers compris entre 1 et p tels que $\alpha\beta - 1$ soit multiple de p (p étant premier, si α est donné, on peut en déduire β).

Les courbes C_0 passant par A et que nous appelerons C_0' acquièrent en ce point la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$, λ_1 et μ_1 étant deux entiers positifs satisfaisant aux congruences

$$\lambda - \alpha\mu \equiv 0, \qquad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. p})$$

et tels que la somme $\lambda_1 + \mu_1$ soit minimum.

L'homographie (1) possède deux droites unies et les courbes C_0' ont λ_1 tangentes en A confondues avec une de ces droites, μ_1 confondues avec l'autre.

Nous avons classé les points unis de seconde espèce en trois catégories suivant la valeur des nombres $\lambda_1 + \alpha\mu_1$, $\mu_1 + \beta\lambda_1$ qui sont multiples de p. Nous ne considérerons ici que les points de la première catégorie pour lesquels on a

$$\lambda_1 + \alpha\mu_1 = p, \; \mu_1 + \beta\lambda_1 = p.$$

Dans ces conditions, si l'on pose

$$p = a\alpha + b, \qquad (b < \alpha)$$

on a

$$\mu_1 = a, \lambda_1 = b, p = b\beta + a, p = (k + 1)ab + a + b.$$

Les courbes C_0' ont donc actuellement la multiplicité $a + b$ en **A**, elles passent a fois par une suite de points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$ infiniment voisins successifs de **A** et b fois par une suite de points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$ infiniment voisins successifs de A. Le point $(\alpha, 1)$ est sur une des droites unies de l'homographie (1), le point $(\beta, 1)$ sur l'autre.

Les points $(\alpha, \alpha - 1)$, $(\beta, \beta - 1)$ sont unis de première espèce pour l'involution I. Aux domaines de ces points correspondent respectivement sur F' une courbe σ_α d'ordre a et une courbe σ_β d'ordre b, se rencontrant en un seul point. La structure du point de diramation A' est constituée par $k + 2$ courbes

$$\sigma_\alpha, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \ldots, \quad \rho_k, \quad \sigma_\beta,$$

chacune de ces courbes rencontrant la précédente et la suivante en un point mais ne rencontrant pas les autres. Les courbes σ_α, σ_β sont rationnelles et de degrés virtuels respectifs $-(a + 1)$, $-(b + 1)$. Les courbes $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ sont rationnelles et de degré virtuel -2.

Les courbes canoniques de F transformées des courbes canoniques de F' passent $a + b - 2$ fois par A, $a - 1$ fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$ et $b - 1$ fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$. (Voir notre note sur la *Construction du système canonique d'une surface multiple* en cours d'impression dans le Bulletin de l'Académie, séance de mars 1961).

2. Commençons par rechercher la relation qui lie les invariants J, J' de Zeuthen-Segre des surfaces F, F'.

Considérons sur F' un faisceau Σ' de courbes Γ et supposons qu'il y ait δ de ces courbes ayant un point double en un point simple de la surface. Si les courbes Γ sont les sections hyperplanes de F', cette surface est donc de classe δ.

Une courbe Γ passant par le point de diramation A′ se décompose en une courbe Γ' rencontrent σ_α en a points et σ_β en b points, telle que l'on ait

$$\Gamma \equiv \Gamma' + \sigma_\alpha + \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_k + \sigma_\beta.$$

La courbe Γ considérée possède donc $a + b + k + 1$ points doubles et on a

$$J' = \delta + (a + b + k + 1) + \ldots - n - 4\pi,$$

les termes non écrits provenant des autres points de diramation de F′.

Soit Σ le faisceau des courbes C_0 correspondant aux courbes Γ de Σ'. Pour déterminer l'influence du point A sur J, nous reprendrons un raisonnement analogue à celui fait par C. Segre.

Considérons un autre faisceau $|D|$ de courbes D et soit R la courbe lieu des points où une courbe D touche une courbe C_0 de Σ. Le point A est multiple d'ordre $a + b - 1$ pour la courbe R et celle-ci passe $a - 1$ fois par les points $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$, $b - 1$ fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$; elle possède encore une branche d'origine A ne passant ni par $(\alpha, 1)$, ni par $(\beta, 1)$.

La courbe R possède $a - 1$ branches passant par $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, a - 1)$ et rencontrant chacune la courbe C'_0 passant par A en p points comptant pour $p - 1$ points doubles de la série découpée par les courbes D sur C cela fait $(a - 1)(p - 1)$ points doubles. De même, en considérant les $b - 1$ branches de R passant par $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$, on trouve $(b - 1)(p - 1)$ points doubles. Enfin la branche de R ne passant ni par $(\alpha, 1)$, ni par $(\beta, 1)$ rencontre C'_0 en $a + b$ points, ce qui équivaut à $a + b - 1$ points doubles. La courbe C'_0 de Σ équivaut donc à

$$(p - 1)(a + b - 2) + a + b - 1$$

courbes de Σ ayant un point double.

Aux courbes Γ de Σ' ayant un point double, correspondent des courbes de Σ ayant p points doubles. On a donc

$$J = p\delta + (p - 1)(a + b - 2) + a + b - 1 + \ldots \\ - 4pn - 4(\pi - 1) - 4.$$

L'élimination de δ entre les expression de J, J' donne

$$J + 4 = p(J' + 4) - (k + 3)p + 1 + \ldots,$$

les termes non écrits provenant des autres points unis de l'involution I.

3. Soient $p^{(1)}$ le genre linéaire de F et $p'^{(1)}$ celui de F'.

D'après le résultat rappelé plus haut, le nombre de points d'intersection absorbés en A de deux courbes canoniques de F transformées de courbes canoniques de F' est égal à

$$\begin{aligned}(a + b - 2)^2 + (\alpha - 1)(a - 1)^2 + (\beta - 1)(b - \lambda)^2 = \\ = p(a + b - 4) + \alpha + \beta + 2.\end{aligned}$$

On a donc

$$(p^{(1)} - 1) = p(p'^{(1)} - 1) + p(a + b - 4) + \alpha + \beta + 2 + \ldots,$$

les termes non écrits provenant des autres points unis de l'involution I.

4. Utilisons maintenant la formule de Nœther

$$p^{(1)} + J = 12p_a + 9.$$

On a

$$\begin{aligned}12(p_a + 1) = 12p(p'_a + 1) \\ + p(a + b - k - 7) + \alpha + \beta + 3 + \ldots,\end{aligned}$$

les termes non écrits provenant des autres points unis de I.

Si nous représentons par N_α l'influence du point uni A sur la relation entre les genres arithmétiques de F, F', nous pouvons écrire

$$N_\alpha = p(a + b - k - J) + \alpha + \beta + 3.$$

Comme on a $\alpha = (k + 1)b + 1$, $\beta = (k + 1)a + 1$, il vient

$$N_\alpha = p(a + b - k - 7) + (k + 1)(a + b) + 5.$$

5. Considérons dans un plan l'involution I d'ordre premier $p = 2\nu + 1$ engendrée par l'homographie non homologique

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon^3 x_3,$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité. Cette involution possède trois points unis :

1) le point $O_1(1, 0, 0)$ correspondant à la valeur $\alpha = 3$;

2) le point O_2 $(0, 1, 0)$ correspondant à la valeur $\alpha = \nu$, car les équations (1) peuvent s'écrire

$$x_1' : x_2' : x_3' = \eta^{\nu} x_1 : x_2 : \eta x_3,$$

en posant $\eta = \epsilon^2$.

3) le point $O_3(0, 0, 1)$ correspondant à la valeur $\alpha = \nu + 2$, car les équations (1) peuvent s'écrire

$$x_1' : x_2' : x_3' = \zeta^{\nu+2} x_1 : \zeta x_2 : x_3,$$

en posant $\zeta = \epsilon^{\nu+2}$.

Les surfaces F, F' sont actuellement rationnelles et on a $p_a = p_a' = 0$; par suite

$$12 = 12p + N_3 + N_{\nu} + N_{\nu+2}.$$

6. Occupons-nous en premier lieu de la détermination de N_{ν}.

Nous avons $\alpha = \nu$ et on en déduit $\beta = 2\nu - 1$. Nous avons ensuite $\mu_1 = a = 2$, $\lambda_1 = b = 1$, d'où

$$p = (k + 1)ab + a + b = 2(k + 1) + 3 = 2\nu + 1$$

et $k = \nu - 2$.

Le point de diramation correspondant à O_2 sur la surface F' est équivalent à une conique σ_α et à $\nu - 1$ droites $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k, \sigma_\beta$.

Nous avons

$$N_{\nu} = -p(\nu + 2) + 3\nu + 2,$$

c'est-à-dire

$$N_{\nu} = -\frac{1}{2}(p^2 - 1).$$

7. Occupons-nous maintenant du point O_3 et du calcul de N_3.

Nous avons $\alpha = 3$ et pour déterminer β observons que l'on peut avoir pour ν l'une des formes $3\nu'$ ou $3\nu' + 2$, d'où $p = 6\nu' + 1$ ou $p = 6\nu' + 5$.

Supposons tout d'abord $p = 6\nu' + 1$. On a alors $\beta = 4\nu' + 1$, $a = 2\nu'$, $b = 1$. Ensuite, on a

$$2\nu'(k + 1) + 2\nu' + 1 = 6\nu' + 1,$$

d'où $k = 1$.

Le point de diramation de F' homologue du point O_1 est équivalent à l'ensemble d'une courbe σ_α d'ordre $2\nu'$ et de deux droites ρ, σ_β.

On a

$$N_3 = p(2\nu' - 7) + 4\nu' + 7,$$

c'est-à-dire

$$N_3 = \frac{1}{3}(p^2 - 20p + 19).$$

Supposons maintenant $p = 6\nu' + 5$. On a $\beta = 2\nu' + 2$, $a = 2\nu' + 1$, $b = 2$. Ensuite, on a

$$6\nu' + 5 = 2(k + 1)(2\nu' + 1) + 2\nu' + 5,$$

d'où $k = 0$.

Le point de diramation de F' correspondant au point O_1 est maintenant équivalent à l'ensemble de deux courbes : une courbe σ_α d'ordre $2\nu' + 1$ et une courbe σ_β d'ordre deux.

Nous avons actuellement

$$N'_3 = p(2\nu' - 4) + 2\nu' + 8,$$

c'est-à-dire

$$N'_3 = \frac{1}{3}(p^2 - 16p + 19).$$

8. On voit que

$$N_{\nu+2} = 12(1 - p) - \frac{1}{3}(p^2 - 20p + 19) + \frac{1}{2}(p^2 - 1)$$

ou

$$N_{\nu+2} = \frac{1}{6}(p^2 - 32p + 31) = \frac{1}{6}(p - 1)(p - 31)$$

si $p = 6\nu' + 1$, et

$$N_{\nu+2} = 12(1 - p) - \frac{1}{3}(p^2 - 16p + 19) - \frac{1}{2}(p^2 - 1)$$

ou

$$N_{\nu+2} = \frac{1}{6}(p^2 - 40p + 30)$$

si $p = 6\nu' + 5$.

Il est aisé de voir que O_3 est un point uni de deuxième catégorie, c'est-à-dire qu'au point de diramation correspondant, la surface F' a un cône tangent décomposé en trois cônes rationnels.

Considérons tout d'abord le cas où $p = 6\nu' + 1$, d'où $\alpha = 3\nu' + 2$ et par conséquent $\beta = 2\nu' + 1$.

La solution en nombres entiers positifs λ_1, μ_1 des congruences

$$\lambda + (3\nu' + 2)\mu \equiv 0, \qquad \mu + (2\nu' + 1)\lambda \equiv 0, \qquad (\text{mod. } 6\nu' + 1)$$

telle que $\lambda_1 + \mu_1$ soit minimum est

$$\lambda_1 = 2, \quad \mu_1 = 2\nu' - 1.$$

On a

$$\lambda_1 + (3\nu' + 2)\mu_1 = \nu'(6\nu' + 1), \mu_1 + (2\nu' + 1)\lambda_1 = 6\nu' + 1,$$

ce qui montre que 0_3 est bien de la deuxième catégorie.

On trouve que les courbes C'_0 passent $2\nu' + 1$ fois par le point 0_3, ν' fois par le point $(\alpha, 1)$, une fois par les points $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 3)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$, $\nu' - 1$ fois par le point $(\alpha, 1)$, deux fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$.

Si nous prenons pour F' une surface normale dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ, le point de diramation correspondant à 0_3 est multiple d'ordre $\nu' + 2$ pour cette surface, le cône tangent se scindant en trois cônes rationnels : un plan (σ_α), un cône (τ_α) d'ordre $\nu' - 1$ et un cône du second ordre (σ_β). Le plan (σ_α) et le cône (σ_β) coupent le cône (τ_α) chacun suivant une génératrice, mais ne se rencontrent pas en dehors du point de diramation.

Considérons maintenant le cas $p = 6\nu' + 5$, d'où $\alpha = 3\nu' + 4$ et $\beta = 4\nu' + 4$.

Les solutions λ_1, μ_1 des congruences

$$\lambda + (3\nu' + 4)\mu \equiv 0, \quad \mu + (4\nu' + 4)\lambda \equiv 0, \quad (\text{mod. } 6\nu' + 5)$$

telles que $\lambda_1 + \mu_1$ soit minimum sont maintenant

$$\lambda_1 = 1, \qquad \mu_1 = 2\nu' + 1$$

et on a

$$\lambda_1 + (3\nu' + 4)\ \mu_1 = (\nu' + 1)(6\nu' + 5),$$
$$\mu_1 + (4\nu' + 4)\lambda_1 = 6\nu' + 5.$$

Le point O_3 est donc bien un point uni de deuxième catégorie.

On trouve cette fois que les courbes C′ passent $2\nu' + 2$ fois par le point O_3, $\nu' + 1$ fois par le point $(\alpha, 1)$, une fois par les points $(\alpha, 2)$, $(\alpha, 3)$, ..., $(\alpha, 3\nu' + 3)$, ν' fois par le point $(\alpha, 1, 1)$ et une fois par les points $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, 4\nu' + 3)$.

Sur la surface F′, supposée normale comme dans le cas précédent, le point de diramation correspondant à O_3 est multiple d'ordre $\nu' + 2$, le cône tangent se décomposant en trois cônes rationnels ; un plan (σ_α), un cône (τ_α) d'ordre ν' et un plan (σ_β). Les plans (σ_α) et (σ_β) coupent chacun le cône (τ_α) suivant une génératrice mais ne se rencontrent pas en dehors du point de diramation.

9. Nous donnerons pour terminer une vérification de notre formule.

Considérons, dans un plan F, l'homographie de période $p = 9\nu^2 + 3\nu + 1$, ν étant un entier choisi de telle sorte que p soit premier,

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon^\alpha x_3, \tag{1}$$

où ϵ est une racine primitive d'ordre p de l'unité et où $\alpha = 9\nu^2 + 1$

L'involution I engendrée par cette homographie possède trois points unis, les sommets O_1, O_2, O_3 du triangle de référence.

Observons que si l'on pose $\eta = \epsilon^{\alpha - 1}$, on a $\eta^\alpha = \epsilon^{p-1}$ et les équations de l'homographie (1) peuvent s'écrire

$$x_1' : x_2' : x_3' = \eta^\alpha x_1 : x_2 : \eta x_3.$$

D'autre part, si l'on pose $\zeta = \epsilon^{3\nu}$, les équations de l'homographie (1) s'écrivent

$$x_1' : x_2' : x_3' = \zeta x_1 : \zeta^\alpha x_2 : x_3.$$

On en conclut que les trois points unis de l'involution I ont la même structure. Cela étant, la relation entre les genres arithmétiques $p_a = p'_a = 0$ du plan F et de la surface F' image de I s'écrit

$$12 = 12p + 3N_a,$$

d'où $N_a = -4(p-1)$. On obtient ainsi l'influence d'un point uni de même structure que $0_1, 0_2, 0_3$ sur la relation entre les genres arithmétiques de F et F' quelle que soit la surface F.

Les points $0_1, 0_2, 0_3$ sont des points unis de seconde espèce et de première catégorie. On a en effet

$$\alpha = 9\nu^2 + 1, \quad \beta = 3\nu + 1, \quad a = 1, \quad b = 3\nu.$$

Ensuite, on a

$$b(3\nu + 1) + a = 9\nu^2 + 3\nu + 1,$$

donc on a bien affaire à des points de première catégorie et $\lambda_1 = 3\nu$, $\mu_1 = 1$.

Enfin, on a

$$(k+1)ab + a + b = 3\nu(k+1) + 3\nu + 1 = 9\nu^2 + 3\nu + 1$$

d'où $k = 3\nu - 1$.

La formule que nous avions établie plus haut (n° 4) donne

$$N_a = -4(p-1),$$

qui est bien la valeur trouvée ci-dessus.

Ajoutons qu'un des points de diramation de la surface F' est équivalent à l'ensemble de $3\nu + 2$ courbes

$$\sigma_\alpha, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{3\nu-1}, \sigma_\beta.$$

Liège, le 13 juin 1961.