Bulletin de la Classe des sciences

Construction du système canonique d'une surface multiple

Lucien Godeaux

Résumé

On considère la surface Φ image d'une involution cyclique d'ordre premier impair appartenant à une surface algébrique F et n'ayant qu'un nombre fini de points unis. On détermine le comportement des courbes canoniques de Φ en un point de diramation, d'où la construction du système canonique de la surface multiple Φ.

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Construction du système canonique d'une surface multiple,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On considère la surface Φ image d'une involution cyclique d'ordre premier impair appartenant à une surface algébrique F et n'ayant qu'un nombre fini de points unis. On détermine le comportement des courbes canoniques de Φ en un point de diramation, d'où la construction du système canonique de la surface multiple Φ.

Dans nos recherches sur les involutions cycliques d'ordre premier n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique, nous avons montré comment on déterminait les structures des points unis et des points de diramation [1]. Soient F la surface support de l'involution et Φ une surface image de celle-ci sur laquelle les points de diramation sont isolés. Si un point A est uni de première espèce, c'est-à-dire si l'involution détermine l'identité dans le faisceau des tangentes à la surface en ce point, le point de diramation correspondant A' est multiple d'ordre p à cône tangent rationnel pour la surface Φ. Les courbes canoniques de Φ passent $p-2$ fois par le point A' et les courbes canoniques de F qui correspondent aux courbes canoniques de Φ ont la multiplicité $p-2$

(1) Voir nos travaux, *Mémoire sur les surfaces multiples* (Mémoires in-8° de l'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 1952), *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples* (DEUXIÈME COLLOQUE DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE DU C. B. R. M., Liège, 1952, pp. 225-241), *La théorie des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et ses applications* (BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÈGE, 1957, pp. 3-15).

en A. Lorsque le point uni A est de seconde espèce, c'est-à-dire lorsque l'involution détermine dans le faisceau des tangentes à F en A une involution binaire non identique, il en est autrement. Le point de diramation A' est alors équivalent, dans son domaine du premier ordre, à un ensemble de quatre courbes rationnelles et il s'agit de déterminer en combien de points chacune de ces courbes est rencontrée par les courbes canoniques de Φ. C'est l'objet de cette note.

Nous conservons les notations de nos travaux cités plus haut et nous rappelons succinctement les points qui nous sont nécessaires ici.

1. Soit sur une surface F une involution cyclique I d'ordre premier impair p, ne possédant qu'un nombre fini de points unis. Considérons un point uni A de seconde espèce, auquel sont attachés les nombres α, β ($\alpha\beta$ — 1 mult. de p).

Construisons sur la surface F un système linéaire $|C|$ contenant p systèmes linéaires partiels $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I et dont le premier est privé de points-base.

Si r_0 est la dimension de $|C_0|$, en rapportant projectivement les courbes de ce système aux hyperplans d'un espace à r_0 dimensions, il correspond à la surface F une surface Φ normale, image de l'involution. Nous désignerons par A' le point de diramation qui correspond sur Φ au point uni A. Rappelons quelles sont les structures des points A et A' dans le cas le plus général.

Le point A est l'origine de deux suites de points unis, infiniment voisins successifs, que nous avons désignées par $(\alpha, 1)$, $(\alpha, 2)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$ et $(\beta, 1)$, $(\beta, 2)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$. Il existe une suite de points unis infiniment voisins successifs d'un point $(\alpha, x + 1)$ de la première suite, se terminant par un point R_α. De même, il existe une suite de points infiniment voisins successifs d'un point $(\beta, x' + 1)$ de la seconde suite, se terminant à un point R_β.

Les points $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, \alpha - 1)$ d'une part et les points $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, \beta - 1)$ d'autre part sont situés sur des branches linéaires d'origine A. Enfin, les points $(\alpha, \alpha - 1)$, $(\beta, \beta - 1)$, R_α, R_β sont unis de première espèce.

Nous posons

$$p = a\alpha + b = b'\beta + a', \quad (b < \alpha,\ a' < \beta),$$

et nous désignons par λ_1, μ_1 la solution en nombres entiers positifs des congruences

$$\lambda + \alpha\mu \equiv 0, \quad \mu + \beta\lambda \equiv 0, \quad (\text{mod. } p)$$

telle que $\lambda_1 + \mu_1$ soit minimum.

Les courbes C_0 passant par A, courbes que nous désignerons par C'_0, ont en ce point la multiplicité $\lambda_1 + \mu_1$, passent par tous les points unis dont il a été question plus haut et a fois par $(\alpha, \alpha - 1)$, m fois par R_α, m' fois par R_β et b' fois par $(\beta, \beta - 1)$.

Le point de diramation A' homologue de A sur Φ, est multiple d'ordre

$$a + m + m' + b'$$

pour la surface Φ, le cône tangent se scindant en quatre cônes rationnels (σ_α) d'ordre a, (τ_α) d'ordre m, (τ_β) d'ordre m' et (σ_β) d'ordre b'. Si nous projetons la surface Φ du point A' sur un hyperplan, nous obtenons une surface Φ_1 sur laquelle se trouvent quatre courbes rationnelles σ_α, τ_α, τ_β, σ_β découpées par les cônes tangents à Φ. Chacune de ces courbes rencontre la précédente et la suivante en un point mais ne rencontre pas les autres. Les points communs aux courbes σ_α et τ_α, τ_α et τ_β, τ_β et σ_β sont au plus doubles pour la surface Φ_1.

Si l'on désigne par Γ les sections hyperplanes de Φ, par Γ' celles de Φ_1, on a

$$\Gamma \equiv \Gamma' + \sigma_\alpha + A + \tau_\alpha + C + \tau_\beta + B + \sigma_\beta,$$

A, B, C désignant des sommes de courbes rationnelles de degré virtuel -2, dont l'une ou l'autre peut d'ailleurs manquer.

Les degrés virtuels des courbes σ_α, τ_α, τ_β, σ_β sont respectivement $-(a+1)$, $-(m+2)$, $-(m'+2)$, $-(b'+1)$.

2. Désignons par $|K'|$ le système canonique de Φ.

Si n est le degré du système $|\Gamma|$ (ordre de Φ) et π le genre des courbes Γ, les courbes K' rencontrent les courbes Γ en $2\pi - 2 - n$ points.

Le degré de $|\Gamma'|$ est $n' = n - (a + m + m' + b')$ et son genre $\pi' = \pi - (a + m + m' + b' - 1)$. Les courbes K' rencontrent les courbes Γ' en $2\pi' - 2 - n'$ points. On a

$$2\pi' - 2 - n' = 2\pi - 2 - n - (a + m + m' + b') + 2.$$

On en conclut que les courbes K' passent $a + m + m' + b' - 2$ fois par A', ou encore, sur la surface Φ_1, que les courbes K' rencontrent l'ensemble $\sigma_a + \tau_a + \tau_\beta + \sigma_\beta$ en $a + m + m' + b' - 2$ points.

Considérons les courbes Γ' qui contiennent la courbe σ_a, c'est-à-dire les courbes Γ^* définies par

$$\Gamma' \equiv \Gamma^* + \sigma_a$$

Les courbes Γ^* rencontrent σ_a en $2a + 1$ points et on en déduit que le degré n^* et le genre π^* du système $|\Gamma^*|$ sont

$$n^* = n' - (3a + 1), \qquad \pi^* = \pi' - 2a$$

Les courbes K' rencontrent les courbes Γ^* en $2\pi^* - 2 - n^*$ points et on a

$$2\pi^* - 2 - n^* = 2\pi' - 2 - n' - (a - 1)$$

On en conclut que les courbes K' rencontrent la courbe σ_a en $a - 1$ points.

Envisageons maintenant les courbes Γ' qui contiennent τ_a, c'est-à-dire les courbes Γ^{**} données par

$$\Gamma' \equiv \Gamma^{**} + \tau_a$$

Les courbes Γ^{**} rencontrent la courbe τ_a en $2m + 2$ points. Le degré n^{**} et le genre π^{**} des courbes Γ^{**} sont donnés par

$$n^{**} = n' - (3m + 2), \qquad \pi^{**} = \pi' - (2m + 1).$$

Les courbes K' rencontrent les courbes Γ^{**} en

$$2\pi^{**} - 2 - n^{**} = 2\pi' - 2 - n' - m$$

points.

On en conclut que les courbes K' rencontrent la courbe τ_a en m points.

On démontrerait de même que les courbes K' rencontrent la courbe σ_β en $b'-1$ points et la courbe τ_β en m' points.

Les courbes canoniques de la surface Φ rencontrent les courbes σ_α, τ_α, τ_β, σ_β respectivement en $\mathrm{a}-1$, m, m', $\mathrm{b}'-1$ *points.*

Ces résultats restent valables si une des courbes τ_α, τ_β ou toutes les deux manquent.

3. Désignons par K les courbes canoniques de la surface F et par K_0 celles de ces courbes qui correspondent aux courbes canoniques K' de la surface Φ.

Les courbes K_0 passent $a-1$ fois par le point $(\alpha, \alpha-1)$, m fois par le point R_α, m' fois par le point R_β et $b'-1$ fois par le point $(\beta, \beta-1)$.

Comparons ce comportement des courbes K_0 en A avec celui des courbes C_0'. Ces dernières passent a fois par $(\alpha, \alpha-1)$, m fois par R_α, m' fois par R_β et b' fois par $(\beta, \beta-1)$. On en conclut que les courbes K_0 passent $\lambda_1+\mu_1-2$ par le point A, une fois de moins que les courbes C_0' par les points $(\alpha, 1)$, ..., $(\alpha, \alpha-1)$, $(\beta, 1)$, ..., $(\beta, \beta-1)$ et le même nombre de fois que les courbes C_0' par les autres points.

Il peut évidemment se faire que pour certaines involutions les conditions imposées aux courbes K_0 soient en nombre trop élevé et que ces courbes n'existent pas. Dans ce cas les courbes canoniques de la surface Φ n'existent pas.

Liège, le 20 février 1961.