Bulletin de la Classe des sciences

Construction d'une variété algébrique à trois dimensions possédant une surface pentacanonique d'ordre zéro

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'une variété algébrique à trois dimensions dépourvue de surfaces canonique, bicanonique, tricanonique, tétracanonique, mais possédant une surface pentacanonique d'ordre zéro.

COMMUNICATIONS D'UN MEMBRE

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Construction d'une variété algébrique à trois dimensions possédant une surface pentacanonique d'ordre zéro,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction d'une variété algébrique à trois dimensions dépourvue de surfaces canonique, bicanonique, tricanonique, tétracanonique, mais possédant une surface pentacanonique d'ordre zéro.

Nous avons établi autrefois la possibilité de variétés algébriques à trois dimensions dépourvues de surfaces canonique, bicanonique, tricanonique, tétracanonique, mais possédant une surface pentacanonique d'ordre zéro (1). Ayant eu récemment l'occasion de revenir sur ces questions, nous démontrons l'existence de ces variétés en en construisant un exemple. Nous partons d'une hypersurface V du cinquième ordre d'un espace à quatre dimensions (sur laquelle tout système linéaire de surfaces est son propre adjoint) transformée en soi par une homographie cyclique de période cinq possédant trois points unis et une droite unie. Sur cette variété V, l'homographie engendre une involution du cinquième ordre possédant cinq points unis. La variété image de cette involution répond à la question et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Il existe des variétés algébriques à trois dimensions dépourvues de surfaces canonique, bicanonique, tricanonique, tétracanonique mais possédant une surface pentacanonique d'ordre zéro.

(1) *Variétés à trois dimensions sur lesquelles l'opération d'adjonction est périodique* (Bulletin des Sciences Mathématiques, 1944, pp. 147-152).

En d'autres termes, il existe des variétés à trois dimensions pour lequelles on a $P_g = P_2 = P_3 = P_4 = 0$, $P_5 = 1$ et d'une manière générale

$$P_{5t+1} = P_{5t+2} = P_{5t+3} = P_{5t+4} = 0, \quad P_{5t+5} = 1 \ (t = 1, 2, \ldots).$$

Ce théorème peut présenter un certain intérêt dans la recherche des conditions de rationnalité d'une variété algébrique à trois dimensions.

Nous utilisons, dans nos développements, les propriétés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique, que nous supposerons connues (¹).

Rappelons qu'un point uni d'une involution cyclique du cinquième ordre appartenant à une surface algébrique peut être un point uni de première espèce, dont tous les points du domaine du premier ordre sont unis, ou bien un point uni de seconde espèce qui peut être de deux sortes : C'est un point uni symétrique auquel sont infiniment voisines deux suites de trois points unis successifs dont les derniers sont unis de première espèce, ou c'est un point uni auquel sont infiniment voisins d'une part un point uni de première espèce, d'autre part une suite de deux points dont le dernier est uni de première espèce.

Nous aurons aussi à utiliser la construction du système canonique d'une surface image de l'involution (²) et la relation qui lie les genres arithmétiques de la surface support et de la surface image d'une involution (³).

Considérons, dans un espace linéaire S_4 à quatre dimensions, l'hypersurface V, du cinquième ordre, d'équation

$$a_0x_0^5 + x_0^3x_2\varphi_1 + x_0^2(a_3x_1x_2^2 + x_1^2\varphi_1') + x_0(a_4x_1^3x_2 + x_2^2\varphi_2 + x_1\varphi_3) \\ + x_1x_2^3\varphi_1'' + x_1^2x_2\varphi_2' + a_1x_1^5 + a_2x_2^5 + \varphi_5(x_3, x_4) = 0,$$

où les φ sont des polynomes homogènes en x_3, x_4 dont le degré

(¹) *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique.* Actualités scient., N° 270 (Paris, Hermann, 1935), *Mémoires sur les surfaces multiples* (Mémoire in-8° de l'Académie roy. de Belgique, 1952, pp. 1-80.

(²) *Construction du système canonique d'une surface multiple* (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1961, pp. 156-160).

(³) *Relations entre les invariantes de deux surfaces algébriques liées par une correspondance rationnelle* (Idem., 1961, pp. 709-719).

est indiqué par l'indice, et l'homographie T, cyclique de période cinq, d'équations

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = x_0 \,; \quad \epsilon x_1 : \epsilon^2 x_2 : \epsilon^3 x_3 : \epsilon^3 x_4,$$

où ϵ est une racine primitive cinquième de l'unité.

Sur la variété V, l'homographie T engendre une involution cyclique I, du cinquième ordre, présentant cinq points unis

$$x_0 = x_1 = x_2 = 0, \quad \varphi_5(x_3, x_4) = 0.$$

Le système des sections hyperplanes G de la variété V est son propre adjoint et par conséquent la variété possède une surface canonique et des surfaces pluricanoniques d'ordre zéro. Les surfaces G ont les genres $p_a = p_g = 4$, $p^{(1)} = 6$.

Désignons par F les surfaces découpées sur V par les hypersurfaces du cinquième ordre. Le système de ces hypersurfaces a la dimension 125 et comme il contient V, la dimension du système $|F|$ est 124. Comme V possède une surface canonique d'ordre zéro, $|F|$ est son propre adjoint et les surfaces F ont par conséquent les genres $p_a = p_g = 124$.

Nous désignerons par Ω une variété image de l'involution I.

2. Dans le système $|F|$, il y a cinq systèmes linéaires partiels $|F_0|$, $|F_1|$, $|F_2|$, $|F_3|$, $|F_4|$ appartenant à l'involution I ; ils sont respectivement découpés sur V par les systèmes linéaires d'hypersurfaces suivants :

$$\lambda_0 x_0^5 + x_0^3 x_2 \psi_1 + x_0^2(\lambda_3 x_1 x_2^2 + x_1^2 \psi_1') + x_0(\lambda_4 x_1^3 x_2 + x_2^2 \psi_2 + x_1 \psi_3)$$
$$+ x_1 x_2^3 \psi_1'' + x_1^2 x_2 \psi_2' + \lambda_1 x_1^5 + \lambda_2 x_2^5 + \psi_5(x_3, x_4) = 0,$$

de dimension 26,

$$\lambda_0 x_0^4 x_1 + x_0^3 \psi_2 + x_0^2(\lambda_1 x_2^3 + x_1 x_2 \psi_1) + x_0(\lambda_2 x_1^2 x_2^2 + x_1^3 \psi_1' + x_2 \psi_3)$$
$$+ \lambda_3 x_1^4 x_2 + x_2^4 \psi_1'' + x_1 x_2^2 \psi_2' + x_1^2 \psi_3' = 0,$$

de dimension 23,

$$\lambda_0 x_0^4 x_2 + \lambda_1 x_0^3 x_1^2 + x_0^2(x_2^2 \psi_1 + x_1 \psi_2) + x_0(\lambda_2 x_1 x_2^3 + x_1^2 x_2 \psi_1' + \psi_4)$$
$$+ \lambda_3 x_1^3 x_2^2 + x_1^4 \psi_1'' + x_2^3 \psi_2' + x_1 x_3 \psi_3 = 0,$$

de dimension 24,

$$x_0^4 \psi_1 + \lambda_0 x_0^3 x_1 x_2 + x_0^2(\lambda_1 x_1^3 + x_2 \psi_2) + x_0(\lambda_2 x_2^4 + x_1 x_2^2 \psi_1' + x_1^2 \psi_2')$$
$$+ \lambda_3 x_1^2 x_2^3 + x_1^3 x_2 \psi_1'' + x_2^2 \psi_3 + x_1 \psi_4 = 0,$$

de dimension 24,

$$x_0^3(\lambda_0 x_2^2 + x_1\psi_1) + x_0^2(\lambda_1 x_1^2 x_2 + \psi_3) + x_0(\lambda_2 x_1^4 + x_2^3\psi_1' + x_1 x_2 \psi_2)$$
$$+ \lambda_3 x_1 x_2^4 + x_1^2 x_2^2 \psi_1'' + x_1^3 \psi_2' + x_2\psi_4 = 0,$$

de dimension 24.

Dans ces équations, les ψ représentent des polynomes homogènes en x_3, x_4 de degré égal à l'indice.

L'hypersurface V appartient au premier de ces systèmes et par conséquent la dimension du systèmes $|F_0|$ est égale à 25. Le système $|F_1|$ a la dimension 23 et les systèmes $|F_2|$, $|F_3|$, $|F_4|$ la dimension 24.

Nous désignerons par Φ, Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 les surfaces qui correspondent sur Ω respectivement aux surfaces F_0, F_1, F_2, F_3, F_4.

Entre une surface Φ et la surface F_0 homologue, nous avons une correspondance (1,5) sans points de diramation, car les surfaces F_0 ne passent pas par les points unis de l'involution. Par conséquent, le genre arithmétique $p_a = 124$ de la surface F_0 et celui, p_a' de Φ, sont liés par la relation

$$p_a + 1 = 5\ (p_a' + 1),$$

d'où $p_a' = 24$.

3. Le comportement des surfaces F_1, F_2, F_3, F_4 aux points unis de l'involution I est évidemment le même en chacun de ces points. Il suffira donc de considérer l'un d'eux et on peut supposer sans restriction que l'un des points unis est le point 0 ($x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$), ce qui revient à supposer que l'on a

$$\varphi_5(x_3,\ x_4) = x_3\varphi_4(x_3,\ x_4).$$

Considérons en premier lieu une surface F_2. Le plan tangent à cette surface au point 0 est donné par

$$x_0 = 0, \quad x_3 = 0$$

et dans ce plan, T détermine l'homographie

$$x_1' : x_2' : x_4' = x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon^3 x_4,$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$x_1' : x_2' : x_4' = \eta^2 x_1 : \eta x_2 : x_4,$$

en posant $\eta = \epsilon^4$.

On voit donc qu'au point uni O sur la surface F_2 sont attachés les nombres $\alpha = 2$, $\beta = 3$. On en conclut qu'au point O sont infiniment voisins sur la droite $x_0 = x_1 = x_3 = 0$ un point uni de première espèce O_{22} et d'autre part, une suite de deux points unis dont le premier se trouve sur la droite $x_0 = x_2 = x_3 = O$, le second étant uni de première espèce. Nous désignerons ces deux derniers points par O_{21}, O'_{21}.

Aux courbes canoniques de la surface Φ_2 correspondent sur la surface F_2 homologue, des courbes canoniques passant simplement par les points O, O_{22}.

Passons à l'examen des surfaces F_3. Au point O, le plan tangent à une de ces surfaces est

$$x_1 = x_3 = 0$$

et dans ce plan, T détermine l'homographie

$$x'_0 : x'_2 : x'_4 = x_0 : \epsilon^2 x_2 : \epsilon^3 x_4,$$

que l'on peut écrire en posant $\eta = \epsilon^2$.

$$x'_0 : x'_2 : x'_4 = \eta x_0 : \eta^2 x_2 : x_4.$$

On voit donc que sur une surface F_3, au point O sont infiniment voisins d'une part sur la droite $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ un point O_{30} uni de première espèce et d'autre part une suite de deux points unis dont le premier O_{32} se trouve sur la droite $x_0 = x_1 = x_3 = O$ et dont le second O'_{32} est uni de première espèce. Au point O sont également associés les nombres $\alpha = 2$, $\beta = 3$.

Aux courbes canoniques d'une surface Φ_3 correspondent, sur la surface F_3 homologue, des courbes canoniques passant simplement par les points O et O_{30}.

Passons maintenant aux surfaces F_4. Le plan tangent au point O à une de ces surfaces a pour équations

$$x_2 = x_3 = 0$$

et dans ce plan, T détermine l'homographie

$$x'_0 : x'_1 : x'_4 = x_0 : \epsilon x_1 : \epsilon^3 x_4$$

que l'on peut écrire, en posant $\eta = \epsilon^2$, sous la forme

$$x'_0 : x'_1 : x'_4 = \eta x_0 : \eta^4 x_1 : x_4.$$

Au point O, sur une surface F_4, sont donc attachés les nombres $\alpha = \beta = 4$. On en déduit que sur cette surface, au point O sont infiniment voisins d'une part une suite de trois points unis dont le premier est sur la droite $x_1 = x_2 = x_3 = O$ et dont le dernier est uni de première espèce, et d'autre part une suite analogue dont le premier point est sur la droite $x_1 = x_2 = x_3 = O$. Nous désignerons par O_{41} le point infiniment voisin de O sur la première de ces droites.

Aux courbes canoniques d'une surface Φ_4 correspondent sur la surface F_4 homologue, des courbes canoniques ne passant pas par les points unis.

4. Considérons une surface F_0^* du système $|F_0|$. Sur cette surface F_0^*, le système canonique $|(F_0, F)|$ contient cinq systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution déterminée sur la surface par l'homographie T ; ce sont les systèmes

$$|(F_0^*,\ F_0)|,\quad |(F_0^*,\ F_1)|,\quad |(F_5^*,\ F_2)|,$$
$$|(F_0^*,\ F_3)|,\quad |(F_0^*,\ F_4)|. \tag{5}$$

Le second de ces systèmes a la dimension 23, les autres la dimension 24.

Comme on l'a vu, le système canonique d'une surface Φ, et donc de la surface Φ^* homologue de F_0^*, a la dimension 23. Il correspond donc à ce système sur F_0^* le second des systèmes (5). On en conclut que l'adjoint au système $|\Phi|$ sur Ω est le système $|\Phi_1|$.

Considérons une surface F_4^* du système $|F_4|$ et soit Φ_4^* la surface qui lui correspond sur Ω. Entre le genre arithmétique $p_a = 124$ de F_4 et celui p_a' de la surface Φ_4^*, nous avons la relation

$$12(p_a + 1) = 5.12(p_a' + 1) - 5.24,$$

d'où $p_a' = 26$.

Le système canonique $|(F_4^*, F)|$ de la surface F_4^* contient cinq systèmes linéaires partiels

$$|(F_4^*, F_0)|,\quad |(F_4^*, F_1)|,\quad |(F_4^*, F_2)|,\quad |(F_4^*, F_3)|,\quad |(F_4^*, F_4)|$$

appartenant à l'involution et dont les dimensions sont respectivement 26, 23, 24, 24, 24. On en conclut que c'est le premier de ces systèmes qui est le transformé du système canonique de la surface Φ_4^*. Par conséquent, l'adjoint au système $|\Phi_4|$ est le système $|\Phi|$.

Considérons maintenant une surface F_3^* de $|F_3|$ et soit Φ_3^* la surface qui lui correspond sur Ω. Entre le genre arithmétique $p_a = 124$ de F_3^* et celui p_a' de Φ_3^* nous avons la relation

$$12(p_a + 1) = 5.12(p_a' + 1) - 5.12,$$

d'où $p_a' = 25$.

Le système canonique $|(F_3^*, F)|$ de la surface F_3^* contient cinq systèmes linéaires partiels

$$|(F_3^*, F_0)|, \quad |(F_3^*, F_1)|, \quad |(F_3^*, F_2)|, \quad |(F_3^*, F_3)|, \quad |(F_3^*, F_4)|$$

appartenant à l'involution et dont les dimensions sont respectivement 26, 23, 24, 24, 24. Nous avons vu que le transformé du système canonique de Φ_3^* passait simplement par les points O, O_{30}. Or, seul le système $|(F_3^*, F_4)|$ satisfait à cette condition parce que les points O_{30} et O_{40} coïncident. Par conséquent, l'adjoint au système $|\Phi_3|$ est $|\Phi_4|$.

On démontre de même que le genre arithmétique d'une surface Φ_2 est égal à 25 et que, les points O_{32} et O_{22} coïncident, le système $|\Phi_3|$ est l'adjoint à $|\Phi_2|$.

Soient enfin F_1^* une surface du système $|F_1|$ et Φ_1^* la surface qui lui correspond sur la variété Ω.

Dans le système canonique $|(F_1^*, F)|$ de F_1^*, il y a cinq systèmes linéaires

$$|(F_1^*, F_0)|, \quad |(F_1^*, F_1)|, \quad |(F_1^*, F_2)|, \quad |(F_1^*, F_3)|, \quad |(F_1^*, F_4)|$$

appartenant à l'involution et parmi eux, le transformé du système canonique de la surface Φ_1^*. Comme $|\Phi_1|$, $|\Phi|$, $|\Phi_4|$, $|\Phi_3|$ sont respectivement adjoints aux systèmes $|\Phi|$, $|\Phi_4|$, $|\Phi_3|$, $|\Phi_2|$, le transformé du système canonique de Φ_1^* ne peut être que $|(F_1^*, F_2)|$. Il en résulte que l'adjoint au système $|\Phi_1|$ est le système $|\Phi_2|$ et que le genre arithmétique de Φ_1^* est $p_a' = 25$, résultat que l'on retrouvera plus loin.

Sur la variété Ω on a donc

$$|\Phi'| = |\Phi_1|, \quad |\Phi_1'| = |\Phi_2|, \quad |\Phi_2'| = |\Phi_3|,$$
$$|\Phi_3'| = |\Phi_4|, \quad |\Phi_4'| = |\Phi|$$

et l'opération d'adjonction a la période cinq. La variété Ω est dépourvue de surfaces canonique, b canonique, tricanonique, tétracanonique, mais possède une surface pentacanonique d'ordre zéro.

5. Les surfaces F_1 possèdent en O un point double, le cône tangent ayant pour équations

$$x_3 = 0, \quad \mu_0 x_0 x_2 + \mu_1 x_1^2 = 0,$$

Ce cône est transformé en lui-même par T et il y a deux génératrices $x_0 = x_1 = x_3 = 0$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ unies pour cette homographie. Les points infiniment voisins de O sur ces génératrices sont unis pour l'involution I. Nous les désignerons par O_2', O_0'.

Pour examiner le premier de ces points, opérons la transformation quadratique

$$T_1 = \begin{pmatrix} y_0 y_2 & y_1 y_2 & y_2 y_4 & y_2 y_3 & y_4^2 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

dont l'inverse est

$$T_1^{-1} = \begin{pmatrix} x_0 x_4 & x_1 x_4 & x_2^2 & x_3 x_4 & x_2 x_4 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix},$$

qui fait correspondre au point considéré le point $y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$. On obtient ainsi des équations qui, débarrassées des facteurs y_2 ou y_2^2, sont (nous n'écrivons que les premiers termes)

$$y_3 \varphi_4(y_2 y_3, y_4^2) + y_0 y_1 y_2 \varphi_3(y_2 y_3, y_4^2) + \dots = 0,$$
$$y_0 y_4 \psi_3(y_2 y_3, y_3^2) + y_1^2 \psi_3'(y_2 y_3, y_4^2) + \dots = 0.$$

La surface transformée a, au transformé de O'_2, un point simple, le plan tangent étant

$$y_0 = 0, \quad y_3 = 0.$$

La transformée de l'homographie T engendre dans ce plan l'homologie

$$y_1' : y_2' : y_4' = \epsilon^4 y_1 : \varepsilon^4 y_2 : y_4.$$

On en conclut que le point O′ est uni de première espèce pour l'involution.

Pour étudier le point O_0', effectuons la transformation

$$T_2 = \begin{pmatrix} y_0 y_4 & y_0 y_1 & y_0 y_2 & y_0 y_3 & y_4^2 \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

dont l'inverse est

$$T_2^{-1} = \begin{pmatrix} x_0^2 & x_1 x_4 & x_2 x_4 & x_3 x_4 & x_0 x_4 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{pmatrix},$$

qui fait correspondre au point O_0' le point $y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = O$. On obtient les équations

$$y_3 \varphi_4(y_0 y_3, y_4^2) + y_0 y_1 y_2 \varphi_3(y_0 y_3, y_4^2) + \ldots = 0,$$

$$y_2 y_4 \psi_3(y_0 y_0, y_4^2) + y_1^2 \psi_3'(y_0 y_3, y_4^2) + \ldots = 0.$$

Le transformé du point O_0' est simple pour cette surface et le plan tangent en ce point est

$$y_2 = 0, \quad y_3 = 0.$$

Dans ce plan, la transformée de T donne l'homographie

$$y_4' : y_1' : y_4' = \epsilon^2 y_0 : 2 y_1 : y_4.$$

On en conclut que le point O'_0 est uni de second espèce pour l'involution I. Il possède d'une part un point infiniment voisin uni de première espèce et d'autre part deux points unis infiniment voisins successifs dont le second est uni de première espèce.

Il résulte de ceci que par une transformation birationnelle, on peut faire correspondre à la surface F_1 une surface sur laquelle l'homologue de l'involution I possède dix points unis : cinq points unis de première espèce et cinq points unis de seconde espèce du type de O'_0. D'autre part, la surface F_1 possède cinq points doubles, sans influence sur le système canonique, et son genre arithmétique est donc $p_a = 124$. Entre p_a et le genre arithmétique p'_a de Φ_1, on a la relation (1)

$$12(p_a + 1) = 5.12(p'_a + 1) - 5.12,$$

d'où $p'_a = 25$. C'est la valeur qui avait été trouvée plus haut.

6. Désignons par G les sections hyperplanes de l'hypersurface V. Parmi ces surfaces, il y en a qui sont transformées en elles-mêmes par T. Ce sont :

Les surfaces G_0 découpées par les hyperplans

$$\lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0,$$

elles forment un faisceau.

La surface G_2 découpée par l'hyperplan $x_0 = 0$,

La surface G_3 découpée par l'hyperplan $x_1 = 0$,

La surface G_4 découpée par l'hyperplan $x_2 = 0$.

Nous désignerons par Ψ_0, Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 les surfaces qui leur correspondent sur la variété Ω.

L'involution déterminée par T sur une surface G_0 est privée de points unis. La surface G_0 étant de genre arithmétique $p_a = 4$, la surface Ψ_0 est de genres $p'_a = 0$. On sait que les surfaces Ψ_0 ont les genres $p'_a = p'_g = 0$, $P_2 = 2$, $P_3 = 4$ (2).

La surface G_2 possède cinq points unis dont l'un est O. Dans le plan tangent $x_0 = x_3 = 0$ en O à la surface, T détermine l'homographie

$$x'_1 : x'_2 : x'_4 = \eta^2 x_1 : \eta x_2 : x_4,$$

où l'on a posé $\eta = \epsilon^4$. Le points O est donc un point uni de la même sorte que sur la surface F_2. La surface G_2 ayant le genre arithmétique $p_a = 4$, le genre p'_a de Ψ_2 est donné par

$$12(p_a + 1) = 5.12(p'_a + 1) - 5.12,$$

d'où $p'_a = 1$.

(1) La formule, dans le cas d'une involution d'ordre p, serait

$$12(p_a + 1) = 12p(p'_a + 1) - \frac{5}{2}(p - 1) - 5(p - 1)(p - 5).$$

Pour $p = 5$, le dernier terme disparait.

(2) Voir notre note *Sur une surface algébrique de genres zéro et de bigenre deux* (RENDICONTI DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI, 2° sem. 1932, pp. 479-581).

La surface G_3 possède cinq points unis de même nature que les points unis de la surface F_3. On trouve que le genre arithmétique de Ψ_3 est $p'_a = 1$.

Enfin, sur la surface G_4, l'involution possède cinq points unis de même nature sur la surface F_4. Le genre arithmétique de Ψ_4 est $p'_a = 2$.

On peut voir en raisonnant comme plus haut que les adjointes aux surfaces Ψ_2, Ψ_3, Ψ_4 sont les surfaces Ψ_3, Ψ_4, Ψ_0. L'adjoint aux surfaces Ψ_0 n'existe pas.

7. En étudiant le comportement des surfaces découpées sur V par les hyperquadriques, on peut déterminer le système linéaire des surfaces découpant sur une surface Ψ_0 le faisceau des courbes bicanoniques de cette surface.

Si nous considérons la surface G_0^* découpée par l'hyperplan

$$\lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0,$$

le transformé du système bicanonique de la surface Ψ_0 correspondante est découpé par les hyperquadriques

$$x_2(\mu_3 x_3 + \mu_4 x_4) + \mu x_1 x_2 = 0.$$

Une de ces hyperquadriques contient la surface G_0^* considérée et par conséquent le système bicanonique d'une surface Ψ_0 est bien un faisceau.

Le faisceau bicanonique d'une surface Ψ_0 est découpé par les surfaces d'un système linéaire contenant les surfaces $\Psi_0 + \Psi_2$ et $\Psi_3 + \Psi_4$. Ces surfaces forment un réseau, mais toute surface Ψ_0 appartient à une surface de ce réseau.

8. On peut obtenir les équations d'un modèle projectif de la variété Ω de la manière suivante :

Écrivons l'équation de l'hypersurface V sous la forme

$$\begin{aligned} & a_0 x_0^5 + a_1 x_1^5 + a_2 x_2^5 + a_3 x_3^5 + a_4 x_4^5 \\ & + x_1^2 x_2 (b_{00} x_3^2 + b_{01} x_3 x_4 + b_{02} x_4^2) \\ & + x_2^2 x_0 (b_{10} x_3^2 + b_{11} x_3 x_4 + b_{12} x_4^3) \\ & + x_0^3 x_1^2 (b_{20} x_3 + b_{21} x_4) + b_3 x_0^2 x_1 x_2^2 \qquad (1) \\ & + x_0^3 x_2 (c_{00} x_3 + c_{01} x_4) + c_1 x_1^3 x_2 x_0 + x_2^3 x_1 (c_{20} x_3 + c_{21} x_4) \\ & + x_0 x_1 (c_{30} x_3^3 + c_{31} x_3^2 x_4 + c_{32} x_3 x_4^2 + c_{33} x_{34}) = 0. \end{aligned}$$

Considérons d'autre part les équations le système linéaire d'hypersurfaces cubiques

$$\lambda_0 x_0^2 x_2 + \lambda_1 x_1^2 x_0 + \lambda_2 x_2^2 x_3 + \lambda_3 x_2^2 x_4 + \lambda_4 x_3^2 x_1$$
$$+ \lambda_4 x_3 x_4 x_1 + \lambda_2 x_4^2 x_1 = 0, \qquad (2)$$

dont chaque hypersurface est transformée en soi par T. Rapportons projectivement ces hypersurfaces aux hyperplans d'un espace linéaire S_6 à six dimensions en posant

$$X_0 : X_1 : X_2 : X_3 : X_4 : X_5 : X_6 =$$
$$x_1^2 x_2 : x_2^2 x_0 : x_2^2 x_3 : x_2^2 x_4 : x_3^2 x_1 : x_3 x_4 x_1 : x_4^2 x_1.$$

On obtiendra les équations de la variété Ω en éliminant les x entre ces équations et celle de la variété V. On trouve tout d'abord

$$\left\| \begin{matrix} X_2 & X_4 & X_5 \\ X_3 & X_3 & X_6 \end{matrix} \right\| = 0,$$

qui représente une variété$_4^3$ V à quatre dimensions, d'ordre trois. Cette variété est d'ailleurs un cône ayant pour sommet la droite d'équations $X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = X_6 = 0$.

En éliminant les x entre les équations donnant les X et l'équation (1), on obtient

$$a_0 X_0^4 X_1 X_4^2 + a_1 X_1^4 X_4 X_2^2 + a_2 X_2^4 X_0 X_1^2$$
$$+ a_3 X_4^4 X_2 X_0^2 + a_5 X_5^4 X_3 X_0^2$$
$$+ X_0 X_1^2 X_2^2 X_3 (b_{00} X_4 + b_{01} X_5 + b_{02} X_6)$$
$$+ X_0^2 X_1 X_2^2 X_3 (b_{10} X_4 + b_{11} X_3 + b_{12} X_0)$$
$$+ X_0^2 X_1^2 X_2 X_3 (b_{20} X_3 + b_{21} X_4) + b_3 X_0^2 X_1^2 X_2^2 X_3$$
$$+ X_0^3 X_1 X_2 X_3 (c_{00} X_4 + c_{01} X_5) + c_1 X_0 X_1^3 X_2^2 X_3$$
$$+ X_1^2 X_2^2 X_3 X_4 (c_{20} X_2 + c_{21} X_3)$$
$$+ X_0^2 X_1 X_2 X_3 (c_{30} X_4^2 + c_{31} X_4 X_5 + c_{32} X_5 X_6 + c_{33} X_6^2) = 0.$$

Cette équation représente une hypersurface du septième ordre V_5^7 qui passe simplement par la droite sommet du cône (3).

La variété Ω est l'intersection des variétés V_4^3 et V_5^7. Le système linéaire (2) étant le plus ample possible dont l'équation, lorsque l'on applique T, se reproduit multipliée par ϵ^2, la variété Ω obtenue est normale.

Observons que les hypersurfaces (2) passent par la droite $x_0 = x_1 = x_2 = 0$, c'est-à-dire par les points unis de l'involution I. Il en résulte qu'à ces points unis correspondent sur Ω des surfaces rationnelles.

Liège, le 21 octobre 1961.