Bulletin de la Classe des sciences

Sur le théorème de permutabilité de Bianchi

Lucien Godeaux

Résumé
L'interprétation du théorème de permutabilité de Bianchi relatif aux congruences W, dans l'espace à cinq dimensions, en regard de l'hyperquadrique de Klein, conduit à une nouvelle construction de congruences W.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur le théorème de permutabilité de Bianchi,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — L'interprétation du théorème de permutabilité de Bianchi relatif aux congruences W, dans l'espace à cinq dimensions, en regard de l'hyperquadrique de Klein, conduit à une nouvelle construction de congruences W.

On sait en quoi consiste le théorème de permutabilité de Bianchi en ce qui concerne les congruences W [1]. Si l'on considère deux congruences W ayant une surface focale commune (x) et si les secondes surfaces focales sont respectivement $(\bar{x})$ et $(\bar{x}')$, il existe une infinité de points x' tels que les droites $x'\bar{x}$, $x'\bar{x}'$ engendrent des congruences W. Si l'on désigne par ξ, $\bar{\xi}$, $\bar{\xi}'$, ξ' les plans tangents aux surfaces (x), $(\bar{x})$, $(\bar{x}')$, (x') aux points homologues, le point x' se trouve sur la droite $r = \bar{\xi}\bar{\xi}'$ et les plans ξ, ξ' passent par la droite $r' = \bar{x}\bar{x}'$.

Observons que si l'on applique le théorème de Bianchi aux congruences $(x\bar{x})$, $(x'\bar{x})$, on voit qu'il existe sur la droite r' une infinité de points $\bar{x}''$ tels que les droites $x\bar{x}''$, $x'\bar{x}''$ engendrent des congruences W.

L'interprétation du théorème de Bianchi dans l'espace à cinq dimensions, en relation avec l'hyperquadrique Q de Klein,

[1] BIANCHI, *Sulla interpretazione geometrica del teorema di Moutard* (Rendiconti della Accademia dei Lincei, 1° sem. 1894, pp. 565-573). Voir aussi DEMOULIN, *Sur la transformation de Moutard et quelques-unes de ses applications géométriques* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1919, pp. 261-284).

conduit à une quadrique Q′ section de Q par un espace linéaire à trois dimensions Σ. Les faisceaux de rayons (x, ξ), (x', ξ'), $(\bar{x}, \bar{\xi})$, $(\bar{x}', \bar{\xi}')$ sont représentés par des génératrices rectilignes de Q′, les deux premiers par des génératrices du même mode, les deux seconds par des génératrices de l'autre mode. Les points d'intersection des deux premières génératrices par les deux secondes représentent les droites $x\bar{x}$, $x\bar{x}'$, $x'\bar{x}$, $x'\bar{x}'$. Si u, v sont les paramètres des asymptotiques sur les surfaces (x), (x'), $(\bar{x})$, $(\bar{x}')$, les tangentes aux courbes u aux quatre points précédents passent par un même point A. Il en est de même des tangentes aux courbes v, qui passent par un même point B. La droite AB est la conjuguée de l'espace Σ par rapport à l'hyperquadrique Q. De plus, B est le transformé de Laplace de A dans le sens des v et A celui de B dans le sens des u.

Appelons pour abréger W(u, v) une congruence W telle que les asymptotiques sur ses surfaces focales soient les courbes u, v. Nous démontrons que si M est un point de Q′ représentant une droite m engendrant une congruence W(u, v), les tangentes aux courbes u, v en M passent respectivement par les points A, B. De plus, si M′ est un point analogue à M, une génératrice de Q′ passant par M et la génératrice de l'autre mode passant par M′ se rencontrent en un point image d'une droite décrivant une congruence W(u, v).

Nous utiliserons dans ce travail des propriétés établies dans notre exposé sur *La Théorie des surfaces et l'Espace réglé* [1].

1. Considérons deux congruences W ayant une nappe focale commune (x) et soient $(\bar{x})$, $(\bar{x}')$ leurs secondes nappes focales. j, j' les droites génératrices : $j = x\bar{x}$, $j' = x\bar{x}'$. Nous désignerons les asymptotiques de ces surfaces par u, v.

Aux surfaces (x), $(\bar{x})$, $(\bar{x}')$ nous associons dans l'espace à cinq dimensions des suites de Laplace

$$\ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, \qquad (L)$$

$$\ldots, \overline{U}_1, \overline{U}, \overline{V}, \overline{V}_1, \ldots, \qquad (\overline{L})$$

$$\ldots, \overline{U}'_1, \overline{U}', \overline{V}', \overline{V}'_1, \ldots, \qquad (\overline{L}')$$

---

(1) Actualités scientifiques, n° 138 (Paris, Hermann, 1934).

autopolaires par rapport à l'hyperquadrique Q de Klein. Les points U (ou $\bar{U}$ ou $\bar{U}'$) représentent les tangentes aux asymptotiques u en x (ou en $\bar{x}$, ou en $\bar{x}'$) et les points V (ou $\bar{V}$, ou $\bar{V}'$) les tangentes aux asymptotiques v aux mêmes points. Les droites UV, $\bar{U}\bar{V}$, $\bar{U}'\bar{V}'$ appartiennent à Q. Dans les suites de Laplace précédentes, chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

La droite UV rencontre la droite $\bar{U}\bar{V}$ en un point J image de la droite j et la droite $\bar{U}'\bar{V}'$ en un point J' image de la droite j', mais les droites $\bar{U}\bar{V}$, $\bar{U}'\bar{V}'$ ne se rencontrent pas (et ne peuvent se rencontrer).

Les points U, V, $\bar{U}$, $\bar{U}'$ déterminent un espace linéaire Σ à trois dimensions qui contient les points $\bar{V}$, $\bar{V}'$ et coupe Q suivant une quadrique Q' dont UV est une génératrice d'un mode et $\bar{U}\bar{V}$, $\bar{U}'\bar{V}'$ sont des génératrices de l'autre mode. Nous désignerons par g les génératrices du premier mode et par $\bar{g}$ celles du second mode.

Les points J, J' déterminent des suites de Laplace inscrites la première dans les suites L, $\bar{L}$, la seconde dans les suites L, $\bar{L}'$. Nous désignerons par J_1, J'_1 les transformés de Laplace de J, J' dans le sens des v, par J_{-1}, J'_{-1} leurs transformés dans le sens des u. Le point J_1 appartient aux droites UU_1, $\bar{U}\bar{U}_1$, le point J'_1 aux droites UU_1, $\bar{U}'\bar{U}'_1$, le point J_{-1} aux droites VV_1, $\bar{V}\bar{V}_1$, enfin le point J'_{-1} aux droites VV_1, $\bar{V}'\bar{V}'_1$. Les droites JJ_1 et $J'J'_1$ se coupent en un point B et les droites JJ_{-1}, $J'J'_{-1}$ en un point A. On sait que le point B est le transformé de Laplace de A dans le sens des v et A celui de B dans le sens des u (Voir notre exposé cité).

La droite conjuguée de Σ par rapport à Q est commune aux espaces U_1UVV_1, $\bar{U}_1\bar{U}\bar{V}\bar{V}_1$, $\bar{U}'_1\bar{U}'\bar{V}'\bar{V}'_1$ respectivement conjugués des droites UV, $\bar{U}\bar{V}$, $\bar{U}'\bar{V}'$. Chacun de ces espaces coupe Q suivant deux plans représentant respectivement les gerbes de rayons de sommets x, $\bar{x}$, $\bar{x}'$ et les plans réglés ξ, $\bar{\xi}$, $\bar{\xi}'$ respectivement tangents aux surfaces (x), $(\bar{x})$, $(\bar{x}')$ aux points x, $\bar{x}$, $\bar{x}'$.

Le plan J_1JJ_{-1} tangent en J à la surface (J) appartient aux deux premiers de ces espaces et le plan $J'_1J'J'_{-1}$ tangent en J' à la surface (J') appartient au premier et au dernier. La droite cherchée est donc l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire la droite AB.

La droite AB coupe Q en deux points R, R′, images de deux droites r, r'. Le plan J_1JJ_{-1} coupe Q suivant deux droites JR, JR′ qui représentent respectivement les faisceaux de rayons $(x, \bar{\xi})$, $(\bar{x}, \xi)$. De même, le plan $J'_1J'J'_{-1}$ coupe Q suivant deux droites J′R, J′R′ qui représentent, la première le faisceau de rayons $(x, \bar{\xi}')$, la seconde le faisceau de rayons $(\bar{x}', \xi)$. Il en résulte que la droite r est l'intersection des plans $\bar{\xi}$, $\bar{\xi}'$ tangents en $\bar{x}$, $\bar{x}'$ aux surfaces $(\bar{x})$, $(\bar{x}')$ tandis que la droite r' contient les points $\bar{x}$, $\bar{x}'$.

Observons que les génératrices g de la quadrique Q′ représentent les faisceaux de rayons ayant leur sommet sur r et dont le plan passe par r', tandis que les génératrices $\bar{g}$ représentent les faisceaux de rayons dont le sommet est sur r' et dont le plan passe par r.

2. D'après le théorème de permutabilité de Bianchi, il existe une infinité de points x' tels que les droites $\bar{x}x'$; $\bar{x}'x'$ engendrent des congruences W. Soit x' un de ces points et soient i, i' les droites $\bar{x}x'$, $\bar{x}'x'$. Le point x' est sur l'intersection des plans $\bar{\xi}$, $\bar{\xi}'$ tangents à $(\bar{x})$, $(\bar{x}')$, c'est-à-dire sur la droite r.

Désignons par I, I′ les points de Q représentant les droites i, i'. Le premier appartient à la droite $\overline{\mathrm{U}}\overline{\mathrm{V}}$, le second à la droite $\overline{\mathrm{U}}'\overline{\mathrm{V}}'$. La droite II′ est une génératrice g de Q′ et représente le faisceau des tangentes en x' à la surface (x').

Soient U′, V′ les points de la droite II′ qui représentent les tangentes aux asymptotiques u, v en x' à (x'). Ces points déterminent une suite de Laplace

$$\ldots, \mathrm{U}'_1, \mathrm{U}', \mathrm{V}', \mathrm{V}'_1, \ldots, \qquad (\mathrm{L}')$$

où chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u.

Les points I, I′ décrivent des réseaux conjugués à la congruence (U′V′). Soient I_1, I'_1 les transformés de Laplace de I, I′ dans le sens des v, I_{-1}, I'_{-1} leurs transformés dans le sens des u. Les points I_1, I'_1 sont respectivement les intersections des droites $\mathrm{U}'\mathrm{U}'_1$ et $\overline{\mathrm{U}}\overline{\mathrm{U}}_1$, $\mathrm{U}'\mathrm{U}'_1$ et $\overline{\mathrm{U}}'\overline{\mathrm{U}}'_1$, les points I_{-1}, I'_{-1} ceux des droites $\mathrm{V}'\mathrm{V}'_1$ et $\overline{\mathrm{V}}\overline{\mathrm{V}}_1$, $\mathrm{V}'\mathrm{V}'_1$ et $\overline{\mathrm{V}}'\overline{\mathrm{V}}'_1$. Les droites II_1, $\mathrm{I}'\mathrm{I}'_1$ se coupent en un point B′ et les droites II_{-1} et $\mathrm{I}'\mathrm{I}'_{-1}$ en un point A′.

Si l'on reprend le raisonnement faits plus haut pour les points J, J′, on voit que la droite A′B′ est la conjuguée par rapport à Q de l'espace Σ et que par conséquent elle coïncide avec AB. Mais de plus, B' étant le transformé de Laplace de A' dans le sens des v et A' celui de B' dans le sens des u, le point A doit coïncider avec A et le point B' avec B.

D'ailleurs, si l'on considère les points J et I, les droites JJ_1 et II_1 doivent se couper en un point de la droite AB conjuguée de Σ par rapport à Q. Puisque JJ_1 coupe AB en B, la droite II_1 passe par B. On démontre de même que la droite $I'I'_1$ passe par B et que II_{-1}, $I'I'_{-1}$ passent par A.

3. Considérons un point M de la quadrique Q' et supposons que la droite m qu'il représente engendre une congruence W, les asymptotiques des nappes focales de cette congruence étant les courbes u, v.

Désignons par y, $\bar{y}$ les foyers de la droite m et par η, $\bar{\eta}$ les plans tangents aux surfaces (y), $(\bar{y})$ en ces points (plans focaux de m). La droite g_m représente le faisceau de rayons (y, η) et la droite $\bar{g}_m$ le faisceau de rayons $(\bar{y}, \bar{\eta})$. Désignons par X, Y les points de g_m représentant les tangentes aux asymptotiques u, v en y à la surface (y) et par $\overline{X}$, $\overline{Y}$ les points de $\bar{g}_m$ représentant les tangentes aux courbes u, v en $\bar{y}$ à la siurface $(\bar{y})$.

Le plan contenant les droites g_m, $\bar{g}_m$ est conjugué par rapport à Q du plan tangent en M à la surface (M), donc ce dernier plan passe par la droite AB, conjuguée de Σ par rapport à Q.

Appelons X_1, $\overline{X}_1$, M_1 les transformés de Laplace des points X, $\overline{X}$, M dans le sens des v et Y_1, $\overline{Y}_1$, M_{-1} ceux des points Y, $\overline{Y}$, M dans le sens des u. Le point M_1 appartient aux droites XX_1, $\overline{X}\overline{X}_1$ et le point M_{-1} aux droites YY_1, $\overline{Y}\overline{Y}_1$. Soient B', A' les points de rencontre des droites MM_1, MM_{-1} avec AB.

Considérons la tangente t en B' à la courbe u tracée sur la surface (B'). Cette tangente se trouve dans le plan M_1MM_{-1} tangent le long de M_1M à la développable engendrée par cette droite. La droite t se trouve également dans le plan tangent à la développable engendrée par la droite BA lorsque u varie, c'est-à-dire dans le plan BAA_1, où A_1 est le transformé de Laplace de A dans le sens des u. Les deux plans M_1MM_{-1} et BAA_1 ne peuvent coïncider et se rencontrent suivant la droite AB, donc la tangente en B' à la ligne u tracée sur la surface (B') est la droite AB.

On démontrerait de même que la tangente en A' à la courbe v tracée sur la surface (A') est la droite AB. Il en résulte que B' est le transformé de Laplace de A' dans le sens des v et A' celui de B' dans le sens des u. Par conséquent, A' coïncide avec A et B' avec B.

Le plan M_1MM_{-1} tangent en M à la surface (M) coupe Q suivant les droites MR, MR'. Ces droites représentent les faisceaux de rayons $(y, \bar{\eta})$ et $(\bar{y}, \eta)$. Il en résulte que le point y appartient à r et le point $\bar{y}$ à r'. De plus le plan η coïncide avec le plan yr' et le plan $\bar{\eta}$ avec le plan $\bar{y}r$.

4. Désignons par N le point de rencontre des droites $g = UV$ et $\bar{g}_m$. Nous allons démontrer que le point N est l'image d'une droite n engendrant une congruence W, les asymptotiques sur les nappes focales étant les courbes u, v.

Le plan des droites g, $\bar{g}_m$ est conjugué par rapport à Q du plan tangent en N à la surface (N), donc ce dernier plan passe par la droite AB. Il coupe Q suivant deux droites NR, NR', donc les foyers de la droite n se trouvent sur les droites r, r' et les plans focaux sont les plans projetant des foyers les droites r, r'.

Soit t la tangente en N à la courbe v tracée sur la surface (N). Puisque, lorsque v varie, la droite UV engendre une développable de plan tangent VUU_1, la droite t se trouve dans ce plan. Lorsque v varie, la droite $\bar{g}_m = MN$ engendre également une développable de plan tangent $M_1\bar{g}_m = B\bar{g}_m$ et la droite t appartient à ce plan. Les plans VUU_1 et $B\bar{g}_m$ se coupent suivant la droite NB, donc la droite t passe par le point B. On démontrerait de même que la tangente à la ligne u tracée sur la surface (N) en N passe par A.

Dénotons par N_1 le point de rencontre de NB avec la droite UU_1. Lorsque u varie, le point B varie sur BA et le point N sur NA, donc à la droite BN correspond une droite du plan NBA. La tangente en N_1 à la courbe u tracée sur la surface (N_1) doit donc se trouver dans le plan NBA mais aussi dans le plan U_1UV, donc elle est confondue avec la droite N_1N. Il en résulte que N est le transformé de Laplace de N_1 dans le sens des u et N_1 celui de N dans le sens des v, donc N décrit un réseau conjugué à la congruence (UV). La droite n décrit donc une congruence W et les asymptotiques des surfaces focales sont les courbes u, v.

On démontrerait de même que le point N' où la droite g_m rencontre la droite JI (ou J'I') représente une droite n' engendrant une congruence W analogue à la congruence (n).

Appelons congruence $W(u, v)$ une congruence W telle que les asymptotiques des nappes focales soient les courbes u, v et que de plus les foyers d'une droite appartiennent aux droites r, r', les plans focaux étant ceux qui projettent des foyers les droites r, r' (ces droites varient évidemment avec u, v). Nous pouvons dire que les congruences $W(u, v)$ sont représentées par des points de la quadrique Q'. De plus, si M, M' représentent des droites m, m' engendrant des congruences $W(u, v)$ et si M, M' n'appartiennent pas à une même génératrice rectiligne de Q', une génératrice passant par M et la génératrice de l'autre mode passant par M', se coupent en un point N représentant une droite n engendrant une congruence $W(u, v)$.

Liège, le 14 novembre 1960.