Bulletin de la Classe des sciences

Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique nuls dont le système bicanonique est irréductible (2e communication)

Lucien Godeaux

Résumé
Résumé. — On établit quelques propriétés de deux systèmes linéaires de courbes existant sur une surface non rationnelle, de genres zéro, dont le système bicanonique est simple et irréductible.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE

Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique nuls dont le système bicanonique est irréductible,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(seconde communication)

Résumé. — On établit quelques propriétés de deux systèmes linéaires de courbes existant sur une surface non rationnelle, de genres zéro, dont le système bicanonique est simple et irréductible.

Dans notre première note [1], nous avons établi que si une surface algébrique F non rationnelle, de genres zéro, $p_a = p_g = 0$, possède un système bicanonique irréductible et simple, et est de genre linéaire au moins égal à trois (et au plus égal à dix), elle contient deux systèmes linéaires de courbes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ tels que ses systèmes tricanonique, tétracanonique, pentacanonique sont respectivement

$$|C_3| = |\Gamma_1 + \Gamma_2|, \quad |C_4| = |\Gamma_1 + \Gamma_2'| = |\Gamma_2 + \Gamma_1''|,$$
$$|C_5| = |\Gamma_1' + \Gamma_2'|.$$

Une solution est donnée lorsque $|\Gamma_2|$ est l'adjoint $|\Gamma_1'|$ à $|\Gamma_1|$, ce dernier système se réduisant alors à une courbe unique, non canonique, mais dont le double est une courbe bicanonique. Contrairement à ce que nous croyons, cette solution n'est pas nécessairement la seule.

Dans cette seconde note, nous démontrons que les systèmes $|\Gamma_1|$ et $|\Gamma_2|$ sont réguliers et que les courbes tricanoniques dé-

[1] Bulletin de l'Académie royale de Belgique, 1959, pp. 362-372.

coupent sur les courbes Γ_1 et Γ_2 des séries linéaires non spéciales. De plus, les séries découpées sur une courbe bicanonique irréductible par les courbes Γ_1, Γ_2 sont complètes.

Les systèmes $|\Gamma_1|$ et $|\Gamma_2|$ peuvent coïncider ; nous examinons également cette hypothèse.

1. Soit F une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 = p^{(1)} = \pi$ dont le système bicanonique $|C_2|$ est simple et irréductible, et où nous supposons $3 \leqslant \pi \leqslant 10$.

Nous avons démontré qu'il existe sur la surface F des courbes Γ_1, Γ_2 telles que si l'on désigne par $|C_3|$, $|C_4|, \ldots, |C_i|, \ldots$ les systèmes tricanonique, tétracanonique, ..., i-canonique, ..., on ait

$$C_3 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2,\ C_4 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2' \equiv \Gamma_2 + \Gamma_1',\ C_5 \equiv \Gamma_1' + \Gamma_2'.$$

Désignons par n_1, π_1, r_1 le degré virtuel, le genre virtuel et la dimension du système $|\Gamma_1|$, par n_2, π_2, r_2 les caractères analogues du système $|\Gamma_2|$. Nous supposerons de plus qu'une courbe Γ_1 rencontre une courbe Γ_2 en n points.

Une courbe C_4 rencontre une courbe Γ_1 en $n + 2(\pi_1 - 1)$ points, donc une courbe C_2 rencontre cette courbe en $\frac{1}{2}n + \pi_1 - 1$ points. Il en résulte que n doit être pair et nous poserons $n = 2n'$. On a donc, en représentant par $[X, Y]$ le nombre de points communs à une courbe X et à une courbe Y,

$$[C_4, \Gamma_1] = 2n' + 2(\pi_1 - 1), \quad [C_4, \Gamma_2] = 2n' + 2(\pi_2 - 1),$$
$$[C_2, \Gamma_1] = n' + \pi_1 - 1, \qquad [C_2, \Gamma_2] = n' + \pi_2 - 1.$$

Nous avons

$$C_6 \equiv 3C_2 \equiv 2C_3 \equiv 2(\Gamma_1 + \Gamma_2).$$

On en déduit

$$3[C_2, \Gamma_1] = 2n_1 + 4n',$$

d'où

$$2n_1 + n' = 3(\pi_1 - 1). \tag{1}$$

On a de même

$$2n_2 + n' = 3(\pi_2 - 1). \tag{2}$$

On a enfin, en exprimant le degré et le genre de C_3,

$$n_1 + n_2 + 4n' = 9(\pi = 1),$$
$$\pi_1 - 1 + \pi_2 - 1 + 2n' = 6(\pi - 1).$$

2. Les courbes C_3 découpent, sur une courbe Γ_1 ou sur une courbe Γ_2, une série linéaire complète, puisque $C_3 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_2$.

Sur une courbe Γ_1, les courbes C_3 découpent une série d'ordre $n_1 + 2n'$. Si x est la dimension de cette série, les courbes C_3 passant par $x + 1$ points de la courbe Γ_1 contiennent cette courbe et sont complétées par les courbes Γ_2. La dimension de C_3 étant $3(\pi - 1)$, on a

$$3(\pi - 1) = x + 1 + r_2.$$

De même, si x' est la dimension de la série d'ordre $n_2 + 2n'$ découpée par les courbes C_3 sur iune courbe Γ_2, on a

$$3(\pi - 1) = x' + 1 + r_1.$$

Supposons que les séries envisagées soient spéciales et soient i_1, i_2 leurs indices de spécialité. On a

$$x = n_1 + 2n' - \pi_1 + i_1, \qquad x' = n_2 + 2n' - \pi_2 + i_2,$$

et par conséquent

$$r_2 = 3(\pi - 1) - n_1 + (\pi_1 - 1) - 2n' - i_1,$$
$$r_1 = 3(\pi - 1) - n_2 + (\pi_2 - 1) - 2n' - i_2.$$

Par addition, on en déduit

$$r_1 + r_2 = 6(\pi - 1) - (n_1 + n_2 + 4n') + (\pi_1 - 1 + \pi_2 - 1) - (i_1 + i_2).$$

Or, d'après le théorème de Riemann-Roch, on a

$$r_1 \geqslant n_1 - (\pi_1 - 1), \qquad r_2 \geqslant n_2 - (\pi_2 - 1)$$
$$r_1 + r_2 \geqslant n_1 + n_2 - (\pi_1 - 1 + \pi_2 - 1).$$

De ces relations, on déduit

$$r_1 + r_2 = 3(\pi - 1) - 2n' - (i_1 + i_2),$$
$$r_1 + r_2 \geqslant 3(\pi - 1) - 2n'.$$

On a donc $i_1 + i_2 \leqslant 0$, c'est-à-dire $i_1 = i_2 = 0$. Les séries considérées sont donc non spéciales. Mais de plus, le signe d'inégalité doit être exclu et on a

$$r_1 = n_1 - (\pi_1 - 1), \qquad r_2 = n_2 - (\pi_2 - 1),$$
$$r_1 + r_2 = 3(\pi - 1) - 2n'.$$

Les courbes tricanoniques découpent sur les courbes Γ_1 et sur les courbes Γ_2 des séries linéaires complètes non spéciales.

Les systèmes linéaires $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ sont réguliers.

3. Les courbes tricanoniques découpent, sur une courbe bicanonique irréductible, la série canonique complète, d'ordre $6(\pi - 1)$ et de dimension $3(\pi - 1)$, les courbes C_2 étant de genre $3(\pi - 1) + 1$. Par un groupe de la série canonique de C_2 ne peut passer qu'une courbe C_3, puisque $p_g = 0$.

Désignons par G_1 les groupes de $n' + \pi_1 - 1$ points découpés sur la courbe C_2 irréductible par les courbes Γ_1. La série $|G_1|$ est spéciale.

Les courbes C_3 découpent sur une courbe Γ_1 une série de dimensions $n_1 + 2n' - \pi_1$. Observons que l'on a, en utilisant la formule (1),

$$n' + \pi_1 - 1 - (n_1 + 2n' - \pi_1) = n_1 - (\pi_1 - 1) + 1 = r_1 + 1.$$

Or, $r_1 \geqslant 0$. On en conclut que les courbes C_3 passant par $n' + \pi_1 - 2$ points d'un groupe G_1 rencontrent la courbe Γ_1 passant par ce groupe en des points fixes. Par conséquent, les courbes C_3 passant par un groupe G_1 contiennent la courbe Γ_1 qui le découpe. On en conclut que les courbes C_3 passant par G_1 coupent encore C_2 suivant les groupes découpés par les courbes Γ_2. Cette série est donc complète.

Les séries découpées sur une courbe bicanonique irréductible par les courbes Γ_1, Γ_2 sont complètes.

L'indice de spécialité de la série $|G_1|$ est $r_2 + 1$ et cette série a la dimension r_1 ; on a donc

$$r_1 = n' + \pi_1 - 1 - 3(\pi - 1) + r_2$$

et de même,

$$r_2 = n' + \pi_2 - 1 - 3(\pi - 1) + r_1.$$

Ces relations ne sont pas indépendantes, car en les additionnant membre à membre, on trouve

$$\pi_1 - 1 + \pi_2 - 1 + 2n' = 6(\pi - 1).$$

4. Supposons maintenant que $|\Gamma_1|$ et $|\Gamma_2|$ coïncident. On a

$$C_3 \equiv 2\Gamma_1, \qquad C_4 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_1', \qquad C_5 \equiv 2\Gamma_2',$$
$$[C_4, \Gamma_1] = n_1 + 2(\pi_1 - 1) = 2[C_2, \Gamma_1].$$

On voit que n_1 est pair et nous poserons $n_1 = 2n_1'$. Nous aurons alors

$$[C_2, \Gamma_1] = n_1' + \pi_1 - 1.$$

De

$$C_6 \equiv 3C_2 - 2C_3 \equiv 4\Gamma_1,$$

on déduit

$$3(\pi_1 - 1) = 5n_1'. \tag{1}$$

On a de plus, en exprimant le genre et le degré de $|C_3|$,

$$\pi_1 - 1 + n_1' = 3(\pi - 1), \qquad 8n_1' = 9(\pi - 1). \tag{2}$$

5. Les courbes C_3 découpent sur une courbe Γ_1 une série d'ordre $4n_1'$ dont nous désignerons la dimension par x. Les courbes C_3 passant par $x + 1$ points d'une courbe Γ_1 contiennent cette courbe et sont complétées par des courbes Γ_1. Si r_1 est la dimension de $|\Gamma_1|$, on a

$$r_1 = 3(\pi - 1) - (x + 1).$$

Si nous désignons par i l'indice de spécialité de la série découpée par les courbes C_3 sur une courbe Γ_1, on a

$$x = 4n_1' - \pi_1 + i,$$
$$r_1 = 3(\pi - 1) + \pi_1 - 1 - 4n_1' - i = 2(\pi_1 - 1) - 3n_1' - i.$$

D'autre part, par le théorème de Riemann-Roch, on a

$$r_1 \geqslant 2n_1' - (\pi_1 - 1),$$

d'où

$$2(\pi_1 - 1) - 3n_1' - i \geqslant 2n_1' - (\pi_1 - 1).$$

En utilisant la relation (1), on trouve $i = 0$ et $r_1 = 2n'_1 - (\pi_1 - 1)$.

Les courbes tricanoniques découpent sur une courbe Γ_1 une série complète non spéciale.

Le système $|\Gamma_1|$ est régulier.

6. Les courbes Γ_1 découpent sur une courbe C_2 irréductible une série linéaire spéciale d'ordre $3(\pi - 1)$ et les courbes C_3 donnent, sur une courbe Γ_1, une série de dimension $4n'_1 - \pi_1$.

En utilisant la relation (1) et la première des relations (2), on voit que

$$4n'_1 - \pi_1 < 4n'_1.$$

Il en résulte que les courbes C_3 passant par le groupe G des points communs à une courbe C_2 et à une courbe Γ_1, contiennent cette courbe. Par conséquent les courbes Γ_1 découpent sur une courbe C_2 irréductible une série linéaire complète dont l'indice de spécialité est égal à $r_1 + 1$.

On peut d'ailleurs remarquer qu'actuellement, les nombres π, π_1, n_1 sont déterminés. La relation $8n'_1 = 9(\pi - 1)$ conduit en effet à poser $\pi = 8t + 1$. Or, on a $\pi \leqslant 10$, donc $t = 1$. On a ainsi

$$\pi = 9, \quad \pi_1 = 16, \quad n_1 = 18, \quad r_1 = 3.$$

Liège, le 22 janvier 1960.