Bulletin de la Classe des sciences

# Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique nuls dont le système bicanonique est irréductible (3e communication)

Lucien Godeaux

**Résumé**

Résumé. — Une surface de genre pa = pg = 0, P(1) ≥ 3, dont le système bicanonique est irréductible, contient deux systèmes linéaires de courbes au moyen desquels les systèmes tricanoniques, tétracanonique, pentacanonique, ... sont formés. On examine ici le cas où l'un des systèmes se réduit à une courbe isolée et on démontre que le second système est l'adjoint à cette courbe.

**Citer ce document / Cite this document :**

Godeaux Lucien. Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique nuls dont le système bicanonique est irréductible (3e communication). In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 46, 1960. pp. 743-747;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1960.67998;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1960_num_46_1_67998;

# Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique zéro dont le système bicanonique est irréductible,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Troisième communication)

*Résumé.* — Une surface de genre $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} \geqslant 3$, dont le système bicanonique est irréductible, contient deux systèmes linéaires de courbes au moyen desquels les systèmes tricanoniques, tétracanonique, pentacanonique, ... sont formés. On examine ici le cas où l'un des systèmes se réduit à une courbe isolée et on démontre que le second système est l'adjoint à cette courbe.

Dans notre première communication [1], nous avons démontré que si une surface F de genres $p_a = p_g = 0$, $p^{(1)} \geqslant 3$ possède un système bicanonique irréductible, elle contient deux systèmes linéaires $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ tels que si $|C_i|$ désigne le système $i$-canonique de la surface, on a

$$|C_3| = |\Gamma_1 + \Gamma_2|, \quad |C_4| = |\Gamma_1 + \Gamma_2'| = |\Gamma_2 + \Gamma_1'|$$
$$|C_5| = |\Gamma_1' + \Gamma_2'|.$$

Dans la seconde communication [2], nous avons montré que les systèmes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ sont réguliers et découpent des séries complètes sur une courbe bicanonique.

Dans cette note, nous supposons que le système $|\Gamma_1|$ se réduit à une courbe isolée et nous démontrons que le second système $|\Gamma_2|$ est l'adjoint $|\Gamma_1'|$ à $\Gamma_1$. Nous retrouvons ainsi un cas qui a

(1) BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 1959, pp. 362-372.
(2) BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 1960, pp. 47-52.

été étudié dans notre première note et dont nous avons d'ailleurs, pour $p^{(1)} = 3$, construit un exemple.

**1.** Soit F une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$, de genre linéaire $p^{(1)} = \pi \geqslant 3$, dont le système bicanonique $|C_2|$ est irréductible.

Dans la première note, nous avons établi l'existence, sur la surface F, de deux systèmes linéaires $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ tels que les systèmes tricanonique $|C_3|$, tétracanonique $|C_4|$ et pentacanonique $|C_5|$ soient

$$|C_3| = |\Gamma_1 + \Gamma_2|, \quad |C_4| = |\Gamma_1 + \Gamma_2'| = |\Gamma_2 + \Gamma_1'|,$$
$$|C_5| = |\Gamma_1' + \Gamma_2'|.$$

Rappelons brièvement les propriétés établies dans la seconde note.

Désignons par $n_1$ le degré, par $\pi_1$ le genre et par $r_1$ la dimension du système $|\Gamma_1|$, par $n_2$, $\pi_2$, $r_2$ les caractères analogues de $|\Gamma_2|$. Les courbes $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ se rencontrent en un nombre de points que nous avons démontré être pair et qui sera désigné par $2n'$.

Nous avons les relations

$$n_1 + n_2 + 4n' = 9(\pi - 1), \tag{1}$$

$$\pi_1 - 1 + \pi_2 - 1 + 2n' = 6(\pi - 1), \tag{2}$$

$$n' + 2n_1 = 3(\pi_1 - 1), \quad n' + 2n_2 = 3(\pi_2 - 1). \tag{3}$$

Les courbes tricanoniques $C_3$ découpent sur chacune des courbes $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ des séries complètes non spéciales.

Les systèmes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ sont réguliers et on a

$$r_1 = n_1 - (\pi_1 - 1), \quad r_2 = n_2 - (\pi_2 - 1).$$

Les courbes $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ découpent sur une courbe bicanonique $C_2$ des séries spéciales complètes, d'ordres respectifs $n' + \pi_1 - 1$, $n' + \pi_2 - 1$ et on a

$$r_1 = n' + \pi_1 - 1 - 3(\pi - 1) + r_2,$$

$$r_2 = n' + \pi_2 - 1 - 3(\pi - 1) + r_1.$$

Observons que l'on peut supposer que l'un des systèmes $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ ne contient pas l'autre. Supposons en effet que $|\Gamma_2|$ contienne $\lambda$ fois $|\Gamma_1|$ et que l'on ait précisément $\Gamma_2 \equiv \lambda\Gamma_1 + \mathrm{A}$. Les systèmes $|\overline{\Gamma}_1| = |(\lambda + 1)\Gamma_1|$, $|\overline{\Gamma}_2| = |\mathrm{A}|$ sont réguliers et il suffira de remplacer $|\Gamma_1|$, $|\Gamma_2|$ par $|\overline{\Gamma}_1|$, $|\overline{\Gamma}_2|$.

**2.** Nous allons maintenant établir que les courbes $\Gamma_2$ découpent sur une courbe $\Gamma_1$ une série complète.

Sur une courbe $\Gamma_1$ déterminée, les courbes $\mathrm{C}_3$ découpent une série linéaire complète, non spéciale, d'ordre $2n' + n_1$, de dimension $2n' + n_1 - \pi_1$. Les courbes $\mathrm{C}_3$ passant par un groupe G de cette série dépendent de $3(\pi - 1) - 2n' - n_1 + \pi_1$ paramètres et ne rencontrent plus la courbe $\Gamma_1$ considérée en dehors de G. Celles de ces courbes qui passent par un point ultérieur de la courbe $\Gamma_1$ contiennent cette courbe et sont complétées par les courbes $\Gamma_2$. La dimension du système $|\Gamma_2|$ est donc égale à $3(\pi - 1) - 2n' - n_1 + \pi_1 - 1$. Or, en utilisant les relations (1) et (2), on trouve que ce nombre est égal à $n_2 - (\pi_2 - 1) = r_2$. Comme aucune des courbes $\Gamma_2$ ne peut contenir la courbe $\Gamma_1$, notre assertion est démontrée.

On établit de même que les courbes $\Gamma_1$ découpent sur une courbe $\Gamma_2$ une série linéaire complète.

**3.** Nous nous proposons de déterminer la surface F dans le cas où la courbe est isolée. On a alors $r_1 = n_1 - (\pi_1 - 1) = 0$, donc $n_1 = \pi_1 - 1$ et, par la première des relations (3), $n' = \pi_1 - 1$

Les courbes $\Gamma_2$ découpent sur la courbe $\Gamma_1$ une série complète d'ordre $2\pi_1 - 2$. Cette série est la série canonique ou une série paracanonique.

On a

$$r_2 = 3(\pi - 1) - 2n' - n_1 + \pi_1 - 1 = 3(\pi - 1) - 2(\pi_1 - 1).$$

Si la série considérée est une série paracanonique, on a $r_2 = \pi_1 - 2$, ce qui donne $3(\pi - \pi_1) = 1$, ce qui est impossible. Donc les courbes $\Gamma_2$ découpent sur la courbe $\Gamma_1$ la série canonique complète. De plus, on a

$$r_2 = 3(\pi - 1) - 2(\pi_1 - 1) = \pi_1 - 1,$$

c'est-à-dire $\pi = \pi_1$.

Les courbes $C_2$ découpent sur la courbe $\Gamma_1$, une série d'ordre $2(\pi_1 - 1)$ qui peut être la série canonique ou une série paracanonique. Supposons que ce soit la série canonique.

Les courbes $C_2$ et $\Gamma_2$ découpent la même série sur $\Gamma_1$. Désignons par $|\Gamma_1'|$ le système adjoint à la courbe $\Gamma_1$. Les courbes $C_2$ et $\Gamma_1'$ découpent la même série sur $\Gamma_1$ ; il en est de même des systèmes $2C_2$ et $2\Gamma_1'$. Or, on a

$$2\Gamma_1' \equiv C_2 + 2\Gamma_1,$$

donc les courbes $2C_2$ et $C_2 + 2\Gamma_1$ découpent la même série sur $\Gamma_1$ et il en est de même des courbes $C_2$ et $2\Gamma_1$. Mais les courbes $2\Gamma_1$ découpent sur $\Gamma_1$ une série d'ordre $2\pi_1 - 2$ et de dimension $\pi_1 - 2$, car $|2\Gamma_1|$ a la dimension $\pi_1 - 1$ et une de ses courbes contient la courbe $\Gamma_1$. On voit donc que $|2\Gamma_1|$ découpe sur $\Gamma_1$ une série paracanonique et il en est par suite de même de $|C_2|$, contrairement à notre hypothèse.

**4.** Les relations (1) et (2) permettent de calculer les caractères de $|\Gamma_2|$ ; on a

$$n_2 = 4(\pi - 1), \pi_2 = 3(\pi - 1) + 1, r_2 = \pi - 1.$$

Ce système découpant sur la courbe $\Gamma_1$ la série canonique complète et ayant les mêmes caractères que l'adjoint $|\Gamma_1'|$ à $\Gamma_1$, coïncide avec ce système. On a donc $\Gamma_2 = \Gamma_1'$ et par suite $C_3 \equiv \Gamma_1 + \Gamma_1'$.

D'autre part, le système $|C_2|$, ayant la dimension $\pi - 1$ et découpant sur $\Gamma_1$ une série paracanonique de dimension $\pi - 2$, il existe une courbe $C_2$ contenant la courbe $\Gamma_1$. On est donc conduit à poser

$$C_2 \equiv \Gamma_1 + X.$$

On en déduit

$$C_2' \equiv C_3 \equiv \Gamma_1' + X \equiv \Gamma_1 + \Gamma_1'.$$

et par conséquent X coïncide avec $\Gamma_1$.

La courbe $\Gamma_1$ n'est pas une courbe canonique, car son adjoint $|\Gamma_2| = |\Gamma_1'|$ ne la contient pas.

On a

$$C_2 = 2\Gamma_1, \quad C_3 = \Gamma_1 + \Gamma_1', \quad C_4 = 2\Gamma_1'.$$

On retrouve la surface étudiée à la fin de notre première communication. Nous avons montré qu'elle représente une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface régulière possédant une seule courbe canonique. Nous avons construit un exemple pour $\pi = 3$.

Saltino (Vallombrosa), le 26 août 1960.