Bulletin de la Classe des sciences

Surfaces dont les quadriques de Lie touchent une ou deux droites

Lucien Godeaux

Résumé
Détermination de surfaces dont les quadriques de Lie touchent une ou deux droites fixes.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Surfaces dont les quadriques de Lie touchent une ou deux droites,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Détermination de surfaces dont les quadriques de Lie touchent une ou deux droites fixes.

Continuant nos recherches sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface, nous appelons l'attention, dans cette note, sur deux cas particuliers qui nous paraissent présenter un certain intérêt.

Nous commençons par établir l'équation différentielle des asymptotiques des nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface, distinctes de celle-ci. Cela nous permet de retrouver la condition pour qu'il y ait conservation des asymptotiques, condition que nous avions donnée autrefois.

Plaçons-nous dans le cas où, en dehors de la surface, l'enveloppe possède quatre nappes et associons, comme d'habitude, à la surface, la suite de Laplace $\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots$ de l'espace à cinq dimensions. Les arêtes du quadrilatère de Demoulin sont représentées par les intersections C, C' de la droite V_1V_2 et D, D' de la droite U_1U_2 avec l'hyperquadrique de Klein Q de S_5. Supposons qu'il y ait conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe. Alors les points C, C' décrivent des réseaux conjugués à la congruence (V_1V_2) et D,D' des réseaux conjugués à la congruence (U_1U_2). Les droites CD, CD', C'D, C'D' représentent les faisceaux des tangentes aux points des quatre nappes de l'enveloppe. Si les points C, D appartiennent à une même suite de Laplace, les asymptotiques sont indéterminées sur la nappe correspondant à CD et cette nappe se réduit à une droite touchée par les quadriques de Lie. Si de plus, les points C′, D′ appartiennent à une même suite de Laplace, la nappe correspondante se réduit également à une droite touchée par les quadriques de Lie.

On obtient donc des surfaces dont les quadriques de Lie touchent une ou deux droites fixes.

Dans ce travail, nous utilisons les notations et les résultats de notre exposé sur *La théorie des surfaces et l'espace réglé* (1).

1. Soit (x) une surface non réglée rapportée à ses asymptotiques u, v. A cette surface, nous associons dans l'espace S_5 de l'hyperquadrique de Klein Q une suite de Laplace

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots \tag{L}$$

dont chaque point est le transformé du précédent dans le sens des u. Le point U représente la tangente à l'asymptotique u au point x de (x) et le point V la tangente à l'asymptotique v. Ces points et la droite UV appartiennent à Q et la suite L est autopolaire par rapport à cette hyperquadrique.

Les points U_1, V_1 ne peuvent appartenir à Q et nous supposerons que les points U_2, V_2 n'appartiennent pas non plus à cette hyperquadrique. Cela implique que les quantités que nous avons appelées α, β ne sont pas nulles.

Les points d'intersection de la droite V_1V_2 et ceux de la droite U_1U_2 avec Q sont donnés par

$$C = V_2 + V_1[\xi + (\log ak_1)^{10}], \qquad D = U_2 + U_1[\eta + (\log bh_1)^{01}],$$

où ξ, η sont donnés par

$$\xi^2 + \alpha = 0, \qquad \eta^2 + \beta = 0.$$

La droite CD représente un faisceau de rayons de sommet p et de plan ϖ. Le point p est un des points caractéristiques de la quadrique de Lie Φ de la surface (x) et le plan ϖ est le plan tangent à l'enveloppe au point p.

(1) *Actualités scientifiques*, n° 138 (Paris, Hermann, 1934).

Nous nous proposons de déterminer l'équation différentielle des asymptotiques de la surface (p).

En utilisant les relations

$$V_3 + V_2(\log a^3k_1^2k_2)^{10} + \alpha_1 V_1 + \xi(\log a\xi)^{10}V$$
$$+ 2b[\beta U + U_1(\log bh_1)^{01} + U_2] = 0,$$
$$U_3 + U_2(\log b^3h_1^2h_2)^{01} + \beta_1 U_1 + \eta(\log b\eta)^{01}U$$
$$+ 2a[\alpha V + V_1(\log ak_1)^{10} + V_2] = 0,$$

que nous avons établies dans notre exposé cité, on trouve

$$C^{10} = [\xi - (\log a)^{10}]C - 2bD$$
$$+ \xi(\log a\xi)^{10}(V_1 + \xi V) + 2b\eta(U_1 + \eta U),$$
$$C^{01} = (k_1 + \xi^{01})(V_1 + \xi V),$$
$$D^{01} = [\eta - (\log b)^{01}]D - 2aC$$
$$+ \eta(\log b\eta)^{01}(U_1 + \eta U) + 2a\xi(V_1 + \xi V),$$
$$D^{10} = (h_1 + \eta^{10})(U_1 + \eta U).$$

Pour que le point $C + \varphi D$ représente une asymptotique de la surface (p), il faut et il suffit que le point

$$(C + \varphi D)^{10}du + (C + \varphi B)^{01}dv$$

appartienne à la droite CD. Ce point a pour expression

$$\{ [\xi - (\log a)^{10}]C - 2bD + \xi(\log a\xi)^{10}(V_1 + \xi V)$$
$$+ 2b\eta(U_1 + \eta U) + \varphi^{10}D + \varphi(k\eta + \eta^{10})(U_1 + \eta U)\} du$$
$$+ \{ (k_1 + \xi^{01})(V_1 + \xi V) + \varphi^{01}D + \varphi[\eta - (\log b)^{01}]D - 2a\varphi C$$
$$+ \varphi\eta (\log b\eta)^{01}(U_1 + \eta U) + 2\varphi a\xi(V_1 + \xi V)\} dv.$$

Pour notre objet, les termes en $U_1 + \eta U$, $V_1 + \xi V$ doivent disparaître, ce qui donne

$$\xi(\log a\xi)^{10}du + [k_1 + \xi^{01} + 2a\xi\varphi]dv = 0,$$
$$[2b\eta + \varphi(h_1 + \eta^{10})]du + \varphi\eta(\log b\eta)^{01}dv = 0.$$

En éliminant φ entre ces équations, on obtient l'équation différentielle des asymptotiques de la surface (p), c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} \xi(\log a\xi)^{10}du + (k_1 + \xi^{01})dv & 2a\xi du \\ 2b\eta du & \eta(\log b\eta)^{01}dv + (ku + \eta^{10})du \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore

$$\begin{aligned} \xi(h_1 + \eta^{10})(\log\ a\xi)^{10}du^2 + [\xi\eta(\log\ a\xi)^{10}(\log\ b\eta)^{01} \\ + (h_1 + \eta^{10})(k_1 + \xi^{01}) - + ab\xi\eta]dudv \\ + \eta(k_1 + \xi^{01})(\log\ b\eta)^{01}dv^2 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

En éliminant du, dv, on obtient l'équation

$$\begin{vmatrix} \xi(\log a\xi)^{10} & k_1 + \xi^{01} + 2a\xi\varphi \\ 2b\eta + (h_1 + \eta^{10})\varphi & \varphi\eta(\log b\eta)^{01} \end{vmatrix} = 0,$$

qui donne les deux valeurs de φ correspondant aux points de la droite CD représentant les tangentes aux asymptotiques de la surface (p).

2. Observons que les quantités $h_1 + \eta^{10}$, $k_1 + \xi^{01}$ ne peuvent être nulles. Supposons en effet $k_1 + \eta^{10} = 0$. On a

$$\beta^{10} = -2h_1(\log bh_1)^{01},\ \eta\eta^{10} = h_1(\log bh_1)^{01}$$

et par suite

$$\eta + (\log bh_1)^{01} = 0.$$

Mais alors, on a $D \equiv U_2$, contrairement à l'hypothèse que U_2 n'appartient pas à Q. On démontre de même que $k_1 + \xi^{01} = 0$ conduit à $C = V_2$, ce qui est impossible.

Cela étant, pour que les asymptotiques soient conservées sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie, il faut et il suffit que l'on ait

$$(\log\ a\xi)^{10} = 0, \quad (\log\ b\eta)^{01} = 0,$$

ou encore

$$(\log\ a^2\alpha)^{10} = 0, \quad (\log\ b^2\beta)^{01} = 0,$$

relations qui sont conséquence l'une de l'autre, car on a

$$a\alpha(\log a^2\alpha)^{10} = b\beta(\log b^2\beta)^{01}.$$

On retrouve ainsi un résultat que nous avions obtenu antérieurement.

Les points de CD qui représentent les tangentes aux asymptotiques de (p) sont

$$2b\eta\mathrm{D} - (h_1 + \eta^{10})\mathrm{C}, \quad 2a\xi\mathrm{C} - (k_1 + \xi^{01})\mathrm{D}.$$

Observons que l'on a

$$\begin{aligned}[2b\eta\mathrm{D} - (h_1 + \eta^{10})\mathrm{C}]^{10} = {} & [2(b\eta)^{10} + 2b(h_1 + \eta^{10}]\mathrm{D} \\ & - [(h_1 + \eta^{10})^{10} + (h_1 + \eta^{10})\{\xi - (\log a)^{10}\}]\mathrm{C},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[2a\xi\mathrm{D} - (k_1 + \xi^{01})\mathrm{C}]^{01} = {} & [2(a\xi)^{01} + 2a(k_1 + \xi^{01})]\mathrm{C} \\ & + [(k_1 + \xi^{01})^{01} + (k_1 + \xi^{01})\{\eta - (\log b)^{01}\}]\mathrm{D}.\end{aligned}$$

On en conclut que si l'on représente par $\bar{\mathrm{U}}$, $\bar{\mathrm{V}}$ les points de la droite CD images des tangentes aux asymptotiques u, v de la surface (p), on a

$$\bar{\mathrm{U}} = 2b\eta\mathrm{D} - (h_1 + \eta^{10})\mathrm{C}, \qquad \bar{\mathrm{V}} = 2a\xi\mathrm{C} - (k_1 + \xi^{01})\mathrm{D}.$$

En effet, les points $\bar{\mathrm{U}}$, $\bar{\mathrm{U}}^{10}$, $\bar{\mathrm{V}}$ sont en ligne droite et d'autre part, il en est de même des points $\bar{\mathrm{V}}$, $\bar{\mathrm{V}}^{01}$, $\bar{\mathrm{U}}$.

3. L'équation différentielle des asymptotiques de (p) s'écrit

$$[(k_1 + \xi^{01})(h_1 + \eta^{10}) - 4ab\xi\eta]du\,dv = 0$$

et les asymptotiques sont indéterminées si l'on a

$$(k_1 + \xi^{01})(h_1 + \eta^{10}) - 4ab\xi\eta = 0. \tag{2}$$

Voyons d'abord à quelle hypothèse correspond cette condition (2).

Les points C, D décrivent des réseaux (u, v) conjugués respectivement aux congruences $(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$, $(\mathrm{U}_1, \mathrm{U}_2)$ et tous deux à la congruence $(\bar{\mathrm{U}}, \bar{\mathrm{V}})$.

On peut prendre, pour les deux premiers transformés de Laplace dans le sens des v,

$$\mathrm{C}_1 = \mathrm{V}_1 + \xi\mathrm{V}, \qquad \mathrm{C}_2 = (k_1 + \xi^{01})\mathrm{V} - 2a\xi\mathrm{U}$$

et pour les deux premiers transformés de D dans le sens des u,

$$D_1 = U_1 + \eta U, \qquad D_2 = (h_1 + \eta^{10})U - 2b\eta V.$$

La condition (2) équivaut à dire que les points C_2, D_2 coïncident.

4. Sous la condition (2), les points que nous appelons $\bar{U}$, $\bar{V}$ coïncident en un point G et nous avons

$$[2a\xi G - (k_1 + \xi^{01})D]^{10} = [\xi - (\log a)^{10}][2a\xi C - (k_1 + \xi^{01})D],$$

$$[2b\eta D - (h_1 + \eta^{10})C]^{01} = [\eta - (\log b)^{01}][2b\eta D - (h_1 + \eta^{10})C].$$

La première équation montre que le point G est indépendant de u et la seconde qu'il est indépendant de v. Le point G est donc fixe lorsque u, v varient.

On a

$$p = 2(\xi\eta x - \eta m - \xi n - y)$$

et l'on en déduit

$$p^{10} - \frac{1}{2}[\xi - (\log a)^{10}]p = 2[(h_1 + \eta^{10})(\xi x - m) - 4b\eta(\eta z - n),$$

$$p^{01} - \frac{1}{2}[\eta - (\log b)^{01}]p = 2[(k_1 + \xi^{01})(\eta x - n) - 4a\xi(\xi x - m).$$

L'élimination des points $\xi x - m$, $\eta x - n$ donne la relation

$$(k_1 + \xi^{01})\left[p^{10} - \frac{1}{2}\{\xi - (\log a)^{10}\}p\right]$$
$$+ (h_1 + \eta^{10})\left[p^{01} - \frac{1}{2}\{\eta - (\log b)^{01}\}p\right] = 0.$$

Au point G correspond une droite g d'équations

$$\left.\begin{aligned} \xi(h_1 + \eta^{10})(z_1 + \xi z_2) + 2b\eta^2(z_1 + \eta z_3) &= 0, \\ z_1 + \xi z_2 + \eta z_3 - \xi\eta z_4 &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (g)$$

cette dernière étant celle du plan tangent en p à la quadrique de Lie

$$z_1 z_4 + z_2 z_3 = 0.$$

La droite g reste fixe lorsque u, v varient.

Remarquons que la première des équations de g peut s'écrire

$$2a\xi^2(z_1 + \xi z_2) + \eta(k_1 + \xi^{01})(z_1 + \eta z_3) = 0.$$

On vérifie que les points p, p^{10}, p^{01} appartiennent à la droite g et on en conclut que lorsque u, v varient, les quadriques de Lie Φ restent tangentes à la droite g.

5. Les autres points caractéristiques de la quadrique de Lie Φ, en dehors de x et de p, sont

$$p_1 = 2(\xi\eta x + \eta m + \xi n - y),$$

$$p_2 = 2(-\xi\eta x - \eta m + \xi n - y),$$

$$p_3 = 2(-\xi\eta x + \eta m - \xi n - y).$$

Ces points décrivent en général des surfaces lorsque u, v varient.

Les tangentes aux asymptotiques u, v en p_1 à la surface (p_1) sont découpées sur le plan tangent

$$z_1 - \xi z_2 - \eta z_3 + \xi\eta z_4 = 0$$

à (p_1) en p_1 par les plans

$$\left.\begin{aligned} \xi(h_1 - \eta^{10})(z_1 - \xi\eta z_2) - 2b\eta^2(z_1 - \eta z_3) &= 0, \\ 2a\xi^2(z_1 - \xi z_2) - \eta(k_1 - \xi^{01})(z_1 - \eta z_3) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Il convient cependant de se demander si la particularité qui se présente pour (p) ne peut se présenter pour (p_1), (p_2) ou (p_3).

Observons que les seconds points de rencontre de Q avec les droites V_1V_2, U_1U_2 sont respectivement

$$C' = V_2 + V_1[-\xi + (\log\ ak_1)^{10}],$$

$$D' = U_2 + U_1[-\eta + (\log\ bh_1)^{01}].$$

Les points C', D' décrivent des réseaux conjugués (u, v) et peuvent appartenir à une même suite de Laplace. Par contre, aucun des points C', D' ne peut appartenir à une suite de Laplace contenant C ou D, donc la particularité qui se présente pour p ne peut se présenter que pour p_1.

On doit alors avoir

$$(k_1 - \xi^{01})(h_1 - \eta^{10}) - 4ab\xi\eta = 0, \tag{4}$$

ce qui entraîne, en vertu de la relation (2),

$$h_1\xi^{01} + k_1\eta^{10} = 0, \qquad h_1k_1 + \xi^{01}\eta^{10} - 4ab\xi\eta = 0. \tag{5}$$

On en déduit

$$h_1(\log ak_1)^{10} + \xi\eta^{10} = 0, \qquad k_1(\log bh_1)^{01} + \eta\xi^{01} = 0, \tag{6}$$

$$\eta(\log ak_1)^{10} + \xi(\log bh_1)^{01} = 0$$

et

$$h_1k_1\xi + k_1(\log ak_1)^{10}\eta^{10} - 4ab\xi^2\eta = 0,$$

$$h_1k_1\eta + h_1(\log bh_1)^{01}\xi^{01} - 4ab\xi\eta^2 = 0,$$

$$h_1k_1\xi\eta + h_1k_1(\log ak_1)^{10}(\log bh_1)^{01} - 4ab\xi^2\eta^2 = 0.$$

Sous la condition (4) les plans (3) coïncident et coupent le plan tangent en p_1 à (p_1) suivant une droite g'. A celle-ci correspond sur Q un point G' qui peut être représenté par l'une ou l'autre des formules

$$2b\eta D' + (h_1 - \eta^{10})C', \qquad 2a\xi C' + (k_1 - \xi^{01})D'.$$

Ce point reste fixe quand u, v varient. Il suffit pour le démontrer de reprendre le raisonnement fait pour G en remplaçant ξ par $-\xi$ et η par $-\eta$.

La droite g' reste fixe quand u, v varient et, sous les conditions (5), les quadriques de Lie touchent deux droites fixes g, g'.

Observons qu'en dérivant par rapport à v la première des équations (6), et en tenant compte de la seconde des équations (5), on trouve

$$k_2 = \xi\eta + (\log ak_1)^{10} (\log bh_1)^{01}.$$

En dérivant par rapport à u la seconde des équations (6), on trouve la même expression pour h_2. On a donc $h_2 = k_2$.

6. Appelons C'_1, C'_2 les deux premiers transformés de Laplace de C' dans le sens des v et D'_1, D'_2 ceux de D' dans le sens des u. Dans nos travaux antérieurs, nous avons introduit le point **A**, intersection des droites CC_1, $C'C'_1$ et le point B, intersection des droites DD_1, $D'D'_1$. Dans le cas de conservation des asymptotiques, ces points sont transformés de Laplace l'un de l'autre. Nous pouvons en effet écrire

$$A = \alpha V + V_1(\log ak_1)^{10} + V_2, \quad B = \beta U + U_1(\log bh_1)^{01} + U_2$$

et nous avons

$$2A^{10} + 2A\ (\log\ a)^{10} + 4bB = 0,$$

$$2B^{01} + 2B\ (\log\ b)^{01} + 4aA = 0.$$

Le transformé de Laplace de A dans le sens des v est l'intersection

$$A_1 = 2a\alpha U + k_1 V\ (\log ak_1)^{10} - k_1 V_1$$

des droites C_1C_2 et $C'_1C'_2$. Celui de B dans le sens des u,

$$B_1 = 2b\beta V + h_1 U\ (\log bh_1)^{01} - h_1 U_1$$

est l'intersection des droites D_1D_2 et $D'_1D'_2$.

Les points $C_2 = D_2$, $C'_2 = D'_2$ décrivent des réseaux conjugués à la congruence (UV), donc le point B_1 est le transformé de A_1 dans le sens des v et le point A_1 est celui de B_1 dans le sens des u. En d'autre termes, B_1 coïncide avec le transformé A_2 de A_1 dans le sens des v et A_1 avec celui, B_2, de B_1 dans le sens des u.

On a

$$A_2 = 2a\alpha U_1 + \left[2a\alpha \left(\log \frac{ab}{k_1}\right)^{01} - 6ak_1 (\log\ ak_1)^{10}\right] U$$
$$- k_1 V\ (\log\ ak^1)^{10}.$$

En écrivant que ce point coïncide avec B_1, on trouve

$$h_1 k_1 k_2 = 4ab\alpha\beta,$$

$$\alpha \left(\log \frac{ab}{k_1}\right)^{01} - 3k_1(\log ak_1)^{10} + \beta(\log bh_1)^{01} = 0.$$

De même, en écrivant que B_2 coïncide avec A_1, on a

$$k_1 h_1 h_2 = 4ab\alpha\beta,$$

$$\beta \left(\log \frac{ab}{k_1}\right)^{10} - 3h_1(\log bh_1)^{01} + \alpha (\log ak_1)^{10} = 0.$$

Ces deux dernières équations doivent être une conséquence des précédentes, puisque l'on exprime chaque fois que la suite de Laplace déterminée par A, B à la période quatre (1).

Remarquons que l'on retrouve la condition $h_2 = k_2$.

Liège, le 11 août 1960.

(1) Nous avons étudié la suite de Laplace déterminée par A, B dans le cas général, dans une *Note sur l'enveloppe des quadriques de Lie d'une surface* (BULLETIN DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 1953, pp. 156-164).