Bulletin de la Classe des sciences

Recherches sur la théorie des congruences de droites (première communication)

Lucien Godeaux

Résumé
Étude des congruences non W de droites en utilisant systématiquement la représentation de ces congruences par des surfaces tracées sur l'hyperquadrique de Klein.

Citer ce document / Cite this document :

Godeaux Lucien. Recherches sur la théorie des congruences de droites (première communication). In: Bulletin de la Classe des sciences, tome 46, 1960. pp. 299-309;

doi : https://doi.org/10.3406/barb.1960.67918;

https://www.persee.fr/doc/barb_0001-4141_1960_num_46_1_67918;

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Recherches sur la théorie des congruences de droites,

par Lucien GODEAUX,
Membre de l'Académie.

(Première communication)

Résumé. — Étude des congruences non W de droites en utilisant systématiquement la représentation de ces congruences par des surfaces tracées sur l'hyperquadrique de Klein.

Notre but dans cette note et dans celles qui lui feront suite est l'étude des congruences de droites en utilisant systématiquement leur représentation sur l'hyperquadrique de Klein. Une congruence de droites (j) étant donnée, le point J qui représente la droite j sur l'hyperquadrique Q de Klein de l'espace à cinq dimensions S_5, décrit une surface (J). Si cette surface satisfait à une équation aux dérivées partielles du second ordre, la congruence (j) est une congruence W. Nous excluons ce cas de nos considérations. La surface (J) satisfait alors à quatre équations aux dérivées partielles du troisième ordre. Ce fait a été utilisé par M. Rozet, qui a réussi à se servir dans ses recherches des transformations de Laplace généralisées dues à MM. Bompiani et B. Segre [1]. Ce n'est pas à ce point de vue que nous nous plaçons ici.

Si l'on considère les surfaces réglées de la congruence (j) passant par une droite déterminée j et les demi-quadriques osculatrices

[1] *Recherches sur la Géométrie projective réglée différentielle* (Mémoires de la Société roy. des Sciences de Liège, 1935), *Sur les congruences non W de droites* (Colloque de Géométrie différentielle du Centre belge de Recherches mathématiques tenu à Louvain en 1951. Paris et Liège, 1951).

à ces réglées le long de la droite j, Koenigs a démontré que les génératrices de ces demi-quadriques engendraient un complexe du second ordre (¹). Nous retrouvons ce théorème en nous servant de la surface (J), ce qui nous permet d'utiliser certaines recherches de Del Pezzo et de C. Segre (²). Nous considérons ensuite les suites de Laplace associées dans l'espace S_5 aux surfaces focales de la congruence, surfaces que nous supposerons non réglées. Cette première note sert d'introduction à l'étude des relations entre les quadriques de Lie des nappes focales de la congruence, qui sera poursuivie dans les notes suivantes (³).

Nous utiliserons les notations et les résultats de notre exposé sur *La Théorie des surfaces et l'Espace réglé* (⁴).

1. Soient (j) une congruence de droites, u, v les paramètres de ses développables, (x) et $(\bar{x})$ ses nappes focales. Nous supposerons que celles-ci sont des surfaces proprement dites, non réglées. Nous supposerons de plus que les arêtes de rebroussement des développables u (sur lesquelles u varie) appartiennent à la surface (x) et que celles des développables v appartiennent à la surface $(\bar{x})$. Dans ces conditions, les équations de la congruence (j) peuvent s'écrire

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \alpha\bar{x}, \qquad \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} = \beta x,$$

α et β étant des fonctions de u, v différentiables autant de fois qu'il sera nécessaire. Nous écrirons ces équations, pour simplifier la typographie, sous la forme

$$x^{10} = \alpha\bar{x}, \quad \bar{x}^{01} = \beta x.$$

(¹) *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé* (ANNALES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, 1882).

(²) DEL PEZZO, *Sugli spazi tangenti ad una superficie od a una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni* (REND. ACCAD. NAPOLI, 1886). C. SEGRE, *Su una classe di superficie dell'iperspazii legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine* (ATTI ACCAD. TORINO, 1906-1907 ; Opere, volume II).

(³) Nous avons déjà, dans une note antérieure, lié le théorème de Koenigs à ces recherches. Voir notre note *Sur un théorème de M. G. Koenigs* (BULLETIN SCIENTIFIQUE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE TIMISOARA, 1928).

(⁴) Actualités scientifiques (Paris, Hermann, 1931).

Dans un travail qui paraîtra prochainement, nous avons démontré que si les quadriques de Lie des nappes focales d'une congruence relatives aux foyers d'une droite se coupent suivant les côtés d'un quadrilatère gauche, la congruence est W.

Les points x, $\bar{x}$ satisfont aux équations de Laplace

$$x^{11} - x^{10} (\log. \alpha)^{01} - \alpha\beta x = 0, \tag{1}$$

$$\bar{x}^{11} - \bar{x}^{01} (\log. \beta)^{10} - \alpha\beta\bar{x} = 0. \tag{2}$$

A la droite j correspond sur l'hyperquadrique Q de Klein de S_5 un point J engendrant une surface (J).

Nous supposerons que la congruence (j) n'est pas une congruence W et que par conséquent le point J ne satisfait pas à une équation aux dérivées partielles du second ordre.

Nous poserons

$$J = |x \quad \bar{x}|$$

et ensuite

$$U = |x \quad x^{10}| = \alpha J, \qquad V = |x \quad x^{01}|,$$

$$\bar{U} = |\bar{x} \quad \bar{x}^{10}|, \qquad V = |\bar{x} \quad \bar{x}^{01}| = -\beta J.$$

Les droites UV, $\overline{UV}$ représentent les faisceaux des tangentes aux surfaces (x), $(\bar{x})$ aux points x, $\bar{x}$ et par conséquent appartiennent à Q.

Les points

$$J^{10} = |x \quad \bar{x}^{10}|, \qquad J^{01} = |x^{01} \quad \bar{x}|,$$

$$J^{20} = \alpha\bar{U} + |x \quad \bar{x}^{20}|, \quad J^{11} = \alpha\beta J + |x^{01} \quad \bar{x}^{10}|,$$

$$J^{02} = -\beta V - |\bar{x} \quad x^{02}|.$$

ne peuvent appartenir à un hyperplan puisque la congruence n'est pas W. Ils déterminent donc complètement l'espace S_5.

2. Une réglée R de la congruence est obtenue en supposant u, v fonctions d'une variable t : $u = u(t)$, $v = v(t)$. Elle est représentée sur la surface (J) par une courbe t.

La demi-quadrique φ osculatrice à la réglée R le long de la droite j est représentée par la section de l'hyperquadrique Q par le plan osculateur à la courbe t au point J. Ce plan est déterminé par les points

$$J, \; J^{10}u' + J^{01}v',$$

$$J^{20}u'^2 + 2J^{11}u'v' + J^{02}v'^2 + J^{10}u'' + J^{01}v''.$$

Un point de S_5 peut être représenté par

$$\chi J + \chi_{10} J^{10} + \chi_{01} J^{01} + \chi_{20} J^{20} + \chi_{11} J^{11} + \chi_{02} J^{02},$$

et les χ sont les coordonnées locales de ce point. Le plan considéré a pour équations locales

$$\frac{v' \chi_{10} - u' \chi_{01}}{u'v'' - v'u''} = \frac{\chi_{20}}{u'^2} = \frac{\chi_{11}}{2u'v'} = \frac{\chi_{02}}{v'^2}.$$

Le lieu de ce plan est l'hyperquadrique

$$\chi_{11}^2 - 4\chi_{20}\chi_{02} = 0.$$

C'est un cône ayant pour sommet le plan $JJ^{10}J^{01}$ tangent au point J à la surface (J). Nous désignerons ce plan par ϖ.

On retrouve ainsi le théorème de Koenigs : *Les demi-quadriques osculatrices aux réglées de la congruence* (j) *le long d'une droite* j *appartenant à toutes ces réglées, appartiennent à un complexe du second ordre.*

3. Désignons par σ le plan tangent en x à la surface (x), c'est-à-dire le plan osculateur en $\bar{x}$ à la courbe v et par $\bar{\sigma}$ le plan tangent en $\bar{x}$ à la surface $(\bar{x})$, c'est-à-dire le plan osculateur en x à la courbe u de (x).

Aux droites du faisceau (x, σ) correspondent les points de la droite JV et aux droites du faisceau $(\bar{x}, \bar{\sigma})$ les points de la droite $J\bar{U}$ de Q.

A la développable des tangentes à une courbe u de (x) correspond sur Q une courbe u appartenant à la surface (J) et dont les tangentes appartiennent à Q. On en conclut qu'aux droites du faisceau $(x, \bar{\sigma})$ correspondent les points de la droite JJ^{10}. De même, aux droites du faisceau $(\bar{x}, \sigma)$ correspondent les points de la droite JJ^{01}.

Aux droites de la gerbe de sommet x correspondent sur Q les points du plan $JJ^{10}V$ et aux droites de la gerbe de sommet $\bar{x}$ les points du plan $JJ^{01}\bar{U}$. Aux droites du plan σ correspondent les points du plan $JJ^{01}V$ et à celles du plan $\bar{\sigma}$ les points du plan $JJ^{10}\bar{U}$. Ces plans appartiennent donc à Q.

L'hyperplan polaire du point J par rapport à Q contient les droites JV, $J\bar{U}$, JJ^{10}, JJ^{01}. Celui du point J^{10} contient les plans

$JJ^{10}V$, $JJ^{10}\bar{U}$ et par suite les droites JV, $J\bar{U}$. Enfin celui du point J^{01} contient les plans $JJ^{01}V$, $JJ^{01}\bar{U}$ et par suite les droites JV, $J\bar{U}$. On en conclut que le plan conjugué du plan $\varpi = JJ^{10}J^{01}$ est le plan ϖ' déterminé par les droites JV, $J\bar{U}$. On remarquera que les plans ϖ, ϖ' n'appartiennent pas à Q.

4. Considérons les réglées R de la congruence (j) qui se raccordent le long de la droite j. Aux demi-quadriques osculatrices à ces réglées le long de j correspondent dans S_5 les plans osculateurs passant par la droite joignant les points J, $J^{10}u' + J^{01}v'$. Le lieu de ces plans est l'espace à trois dimensions S_3 passant par les point J, J^{10}, J^{01} et par le point

$$\chi = 0, \quad \chi_{10} = 0, \quad \chi_{01} = 0, \quad \frac{\chi_{20}}{u'^2} = \frac{\chi_{11}}{2u'v'} = \frac{\chi_{02}}{v'^2}.$$

Cet espace passe par le plan ϖ. Il coupe Q suivant une quadrique dont les points représentent les droites d'une congruence bilinéaire. Les directrices de celle-ci ont pour images les sections de Q par la droite conjuguée de l'espace S_3. Cette droite appartient au plan ϖ' conjugué de ϖ et les directrices sont donc représentées par des points des droites JV, $J\bar{U}$.

On obtient ainsi un second théorème de Koenigs : *Les demi-quadriques osculatrices aux réglées de la congruence se raccordant le long d'une droite* j, *appartiennent à une congruence bilinéaire dont les directrices sont tangentes l'une à la surface* (x) *en* x, *l'autre à la surface* ($\bar{\text{x}}$) *en* $\bar{\text{x}}$.

Si l'une des réglées R est obtenue en posant $u = u(t)$, $v = v(t)$, les directrices de la congruence sont évidemment la tangente en x à la courbe t tracée sur (x) et la tangente en $\bar{x}$ à la courbe t tracée sur $(\bar{x})$. Ces tangentes sont représentées sur Q par les points

$$A = \left| x \frac{dx}{dt} \right| = \alpha J u' + V v', \quad \bar{A} = \left| \bar{x} \frac{d\bar{x}}{dt} \right| = -\beta J v' + \bar{U} u'.$$

La droite $A\bar{A}$ est donc la conjuguée par rapport à Q de l'espace à trois dimensions S_3 qui vient d'être rencontré.

Observons que les points A, $\bar{A}$ se correspondent dans une homographie. Si $t = u$, on a $A = \alpha J$, $\bar{A} = \bar{U}$ et si $t = v$, on a $A = V$, $\bar{A} = -\beta J$. On en conclut que la droite $A\bar{A}$ enveloppe une conique tangente en V à la droite JV et en $\bar{U}$ à la droite $J\bar{U}$.

5. Représentons par $\Omega(p, q) = 0$ la condition pour que deux points p, q soient conjugués par rapport à Q, de telle sorte que l'équation de cette hyperquadrique soit $\Omega(p, p) = 0$.

Nous avons

$$\Omega(J, J) = 0, \qquad \Omega(J, J^{10}) = 0, \qquad \Omega(J, J^{01}) = 0,$$
$$\Omega(J^{10}, J^{10}) = 0, \qquad \Omega(J^{01}, J^{01}) = 0, \qquad \Omega(J, J^{20}) = 0,$$
$$\Omega(J, J^{02}) = 0, \qquad \Omega(J^{10}, J^{20}) = 0, \qquad \Omega(J^{01}, J^{02}) = 0.$$

On a ensuite

$$\Omega(J^{10}, J^{01}) = \Omega(\,|\,x\ \bar{x}^{10}\,|,\ |\,x^{01}\ \bar{x}\,|\,) = \begin{vmatrix} x \\ \bar{x}^{10} \\ x^{01} \\ \bar{x} \end{vmatrix} = \Omega(V, \bar{U}).$$

Cette dernière quantité ne peut être nulle, car autrement les tangentes xx^{01} à (x) et $\bar{x}\bar{x}^{10}$ à $(\bar{x})$ se rencontreraient et les plans focaux de la congruence seraient confondus, contrairement à l'hypothèse faite au début.

Nous avons encore

$$\Omega(J, J^{11}) = -\,\Omega(V, \bar{U}), \qquad \Omega(J^{10}, J^{11}) = 0,\ \Omega(J^{01}, J^{11}) = 0,$$
$$\Omega(J^{11}, J^{11}) = -\,2\alpha\beta\,\Omega(V, \bar{U}), \qquad \Omega(J^{10}, J^{02}) = \Omega(V^{01}, \bar{U}),$$
$$\Omega(J^{01}, J^{20}) = \Omega(V, \bar{U}^{10}), \qquad \Omega(J^{20}, J^{11}) = \Omega(V, |\bar{x}^{10}\ \bar{x}^{20}|\,),$$
$$\Omega(J^{02}, J^{11}) = \Omega(\bar{U}, |x^{01}\ x^{02}|\,),$$
$$\Omega(J^{20}, J^{20}) = 2\alpha\,\Omega(\bar{U}, |x\ \bar{x}^{20}|\,),$$
$$\Omega(J^{02}, J^{02}) = 2\beta\,\Omega(V, |x^{02}\ x|\,),$$
$$\Omega(J^{20}, J^{02}) = -\,\alpha\beta\,\Omega(V, \bar{U}) + \Omega(V^{01}, \bar{U}^{10}).$$

L'équation locale de l'hyperquadrique Q est par conséquent

$$\begin{aligned} &\Omega(V, \bar{U})\,[\chi_{10}\chi_{01} - \chi\chi_{11} - \alpha\beta\chi_{20}\chi_{02} - \alpha\beta\chi_{11}^2] \\ &+ \chi_{10}\chi_{02}\Omega(V^{01}, \bar{U}) + \chi_{01}\chi_{20}\,\Omega(V, \bar{U}^{10}) \\ &+ \alpha\chi_{20}^2\Omega(\bar{U}, |x\ \bar{x}^{20}|\,) + \chi_{02}\chi_{20}\,\Omega(V^{01}, \bar{U}^{10}) + \beta\chi_{02}^2\Omega(V, |x^{02}\ \bar{x}|\,) \\ &+ \chi_{11}\chi_{20}\,\Omega(V, |\bar{x}^{10}\ \bar{x}^{20}|\,) + \chi_{11}\,\chi_{02}\Omega(\bar{U}, |x^{01}\ x^{02}|\,) = 0. \end{aligned}$$

6. Les points J, J^{10}, ..., J^{02} déterminant l'espace S_5, les points V et $\bar{U}$ doivent s'exprimer linéairement en fonction des points précédents. On a

$$\Omega(\mathrm{V}, \mathrm{J}) = 0, \quad \Omega(\mathrm{V}, \mathrm{J}^{10}) = 0, \quad \Omega(\mathrm{V}, \mathrm{J}^{01}) = 0, \quad \Omega(\mathrm{V}, \mathrm{J}^{11}) = 0,$$

et on en déduit

$$\begin{aligned} \mathrm{V} = {} & \alpha\Omega(\mathrm{V}, \bar{\mathrm{U}}) [\mathrm{J}\Omega(\bar{\mathrm{U}}, |x^{01}\, x^{02}|) - \mathrm{J}^{01}\Omega(\mathrm{V}^{01}, \bar{\mathrm{U}}) + \mathrm{J}^{02}\Omega(\mathrm{V}, \bar{\mathrm{U}})] \\ & + \Omega(\mathrm{V}, |\bar{x}\, x^{02}|) [\mathrm{J}\Omega(\mathrm{V}, |\bar{x}^{10}\, \bar{x}^{20}|) - \mathrm{J}^{10}\Omega(\mathrm{V}, \bar{\mathrm{U}}^{10}) + \mathrm{J}^{20}\Omega(\mathrm{V}, \bar{\mathrm{U}})]. \end{aligned} \tag{3}$$

De même, on a

$$\Omega(\bar{\mathrm{U}}, \mathrm{J}) = 0, \quad \Omega(\bar{\mathrm{U}}, \mathrm{J}^{10}) = 0, \quad \Omega(\bar{\mathrm{U}}, \mathrm{J}^{01}) = 0, \quad \Omega(\bar{\mathrm{U}}, \mathrm{J}^{11}) = 0$$

et on en déduit

$$\begin{aligned} \bar{\mathrm{U}} = {} & \beta\Omega(\mathrm{V}, \bar{\mathrm{U}}) [\mathrm{J}\Omega(\mathrm{V}, |\bar{x}^{10}\, \bar{x}^{20}|) - \mathrm{J}^{10}\Omega(\mathrm{V}, \bar{\mathrm{U}}^{10}) + \mathrm{J}^{20}\Omega(\mathrm{V}, \bar{\mathrm{U}})] \\ & + \Omega(\bar{\mathrm{U}}, |x\, \bar{x}^{20}|) [\mathrm{J}\Omega(\bar{\mathrm{U}}, |x^{01}\, x^{02}| - \mathrm{J}^{01}\Omega(\mathrm{V}^{01}, \bar{\mathrm{U}}) + \mathrm{J}^{02}\Omega(\mathrm{V}, \bar{\mathrm{U}})]. \end{aligned} \tag{3'}$$

Les équations du plan $\mathrm{J}\mathrm{V}\bar{\mathrm{U}}$ sont :

$$\chi_{10}\Omega(\mathrm{V}, \bar{\mathrm{U}}) + \chi_{20}\Omega(\mathrm{V}, \bar{\mathrm{U}}^{10}) = 0, \qquad \chi_{11} = 0,$$
$$\chi_{02}\Omega(\mathrm{V}, \bar{\mathrm{U}}) + \chi_{02}\Omega(\mathrm{V}^{01}, \bar{\mathrm{U}}) = 0.$$

On remarquera que les points x^{20}, $\bar{x}^{20}$, ... s'expriment linéairement en fonction de x, $\bar{x}$, x^{01}, $\bar{x}^{10}$. Il existe par suite certaines relations entre les coefficients des formules (3), (3'). On pourrait les déterminer directement en calculant de deux manières $\Omega(\mathrm{V}, \mathrm{J}^{20})$, $\Omega(\mathrm{V}, \mathrm{J}^{02})$ au moyen de (3) et $\Omega(\bar{\mathrm{U}}, \mathrm{J}^{20})$, $\Omega(\bar{\mathrm{U}}, \mathrm{J}^{02})$ au moyen de (3').

7. Désignons par ξ, η les asymptotiques de la surface (x). On passera des variables u, v aux variables ξ, η par les relations

$$u = u(\xi, \eta), \; v = v(\xi, \eta),$$

le déterminant fonctionnel $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(\xi, \eta)}$ n'étant pas nul.

Nous représenterons sur Q par X, Y les tangentes aux asymptotiques ξ, η en un point x. Nous aurons donc

$$\mathrm{X} = \left| x \, \frac{\partial x}{\partial \xi} \right| = a\mathrm{J}\frac{\partial u}{\partial \xi} + \mathrm{V}\frac{\partial v}{\partial \xi}, \tag{4}$$

$$\mathrm{Y} = \left| x \frac{\partial x}{\partial \eta} \right| = a\mathrm{J} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \mathrm{V} \frac{\partial v}{\partial \eta}. \tag{5}$$

Le réseau (u, v) étant conjugué, le quaterne (J, V, X, Y) est harmonique et on a donc

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0. \tag{6}$$

Les conditions pour que les courbes ξ, η soient les asymptotiques de (x) s'expriment les équations

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + 2a_1 \frac{\partial x}{\partial \xi} + 2b_1 \frac{\partial x}{\partial \eta} + c_1 x = 0,$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + 2a_2 \frac{\partial x}{\partial \xi} + 2b_2 \frac{\partial x}{\partial \eta} + c_2 x = 0,$$

les a, b, c étant des fonctions de ξ, η donc de u, v et les équations étant complètement intégrables.

Parmi les conditions d'intégrabilité, on trouve

$$\frac{\partial a_1}{\partial \eta} = \frac{\partial b_2}{\partial \xi}$$

et on est donc conduit à poser

$$2a_1 = \frac{\partial}{\partial \xi} (\log.\ \theta),\ 2b_2 = \frac{\partial}{\partial \eta} (\log.\ \theta),$$

θ étant une fonction de ξ, η. Nous écrirons les équations précédentes sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} (\log.\ \theta) \frac{\partial x}{\partial \eta} + 2b \frac{\partial x}{\partial \eta} + c_1 x = 0, \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial}{\partial \eta} (\log.\ \theta) \frac{\partial x}{\partial \eta} + 2a \frac{\partial x}{\partial \xi} + c_2 x = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

ou encore sous la forme

$$\Psi_1(x) + c_1 x = 0. \quad \Psi_2(x) + c_2 x = 0.$$

Passons aux variables u, v. Les équations (7) deviennent

$$\begin{aligned} x^{20}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2 + x^{02}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + x^{10}\left[\Psi_1(u) + 2\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \xi}(\log.\alpha)^{01}\right] \\ + x^{01}\,\Psi_1(v) + \left[2\alpha\beta\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \xi} + c_1\right]x = 0, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} x^{20}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2 + x^{02}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2 + x^{01}\left[\Psi_2(v) + 2\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \eta}(\log.\beta)^{10}\right] \\ + x^{10}\Psi_2(u) + \left[2\alpha\beta\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \eta} + c_2\right]x = 0. \end{aligned} \tag{8'}$$

La surface (x) ne peut satisfaire qu'à deux équations aux dérivées partielles. L'une est l'équation (1) et les équations (8) doivent donc être identiques. On a par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2} = \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2}{\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2} = \frac{\Psi_1(u) + 2\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \eta}(\log.\alpha)^{01}}{\Psi_2(u)} = \\ = \frac{\Psi_1(v)}{\Psi_2(v) + 2\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \eta}(\log.\beta)^{10}} = \frac{2\alpha\beta\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \xi} + c_1}{2\alpha\beta\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \eta} + c_2}. \end{aligned} \tag{9}$$

Observons que la première de ces équations,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 = 0$$

est vérifiée identiquement en vertu de (6).

8. Les points X, Y sont transformés de Laplace l'un de l'autre, les variables étant ξ, η. On a

$$\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial \xi} + \mathrm{X}\frac{\partial}{\partial \xi}(\log.\theta) + 2b\mathrm{Y} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \eta} + \mathrm{Y}\frac{\partial}{\partial \eta}(\log.\theta) + 2a\mathrm{X} = 0.$$

Observons que ces relations peuvent s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\mathrm{X}}{\theta}\right) + 2b\frac{\mathrm{Y}}{\theta} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\mathrm{Y}}{\theta}\right) + 2a\frac{\mathrm{X}}{\theta} = 0.$$

Le transformé de $\frac{X}{\theta}$ dans le sens des η est

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{X}{\theta}\right) - \frac{X}{\theta}\frac{\partial}{\partial\eta}(\log.\ b).$$

Nous le désignerons par $\frac{X_1}{\theta}$ et nous aurons

$$X_1 = \frac{\partial X}{\partial\eta} - X\frac{\partial}{\partial\eta}(\log.\ b\theta).$$

On en déduit

$$\frac{\partial X_1}{\partial\xi} = X_1\frac{\partial}{\partial\xi}(\log.\ \theta) + h_1 X,$$

en posant

$$h_{12} - \frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}(\log.\ b) + 4ab.$$

Le transformé de $\frac{X_1}{\theta}$ dans le sens des η est

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{X_1}{\theta}\right) - \frac{X_1}{\theta}\frac{\partial}{\partial\eta}(\log.\ bh_1)\ ;$$

nous le représenterons par $\frac{X_2}{\theta}$ et nous aurons

$$X_2 = \frac{\partial X_1}{\partial\eta} - X_1\frac{\partial}{\partial\eta}(\log.\ bh_1\theta).$$

Nous avons

$$\frac{\partial X_2}{\partial\xi} = X_2\frac{\partial}{\partial\xi}(\log.\ bh_1) + h_2 X_1,$$

où

$$h_2 = -\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}(\log.\ bh_1) + h_1.$$

De même, les deux premiers transformés de Laplace successifs de Y dans le sens des ξ sont

$$Y_1 = \frac{\partial Y}{\partial\xi} - Y\frac{\partial}{\partial\xi}(\log.\ a\theta),$$

$$Y_2 = \frac{\partial Y_1}{\partial \xi} - Y_1 \frac{\partial}{\partial \xi} (\log. ak_1\theta),$$

où

$$k_1 = -\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} (\log. a) + 4ab.$$

9. Nous désignerons par $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ les paramètres des asymptotiques de la surface $(\bar{x})$. Nous aurons $u = u(\bar{\xi}, \bar{\eta})$, $v = v(\bar{\xi}, \bar{\eta})$, le jacobien de ces fonctions n'étant pas nul.

Nous représenterons par $\overline{X}$, $\overline{Y}$ les points de Q images des tangentes aux asymptotiques $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$ en un point $\bar{x}$. Nous aurons, d'une manière précise

$$\overline{X} = \left| \bar{x} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{\xi}} \right| = \left| \bar{x} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \right| \frac{\partial u}{\partial \bar{\xi}} + \left| \bar{x} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} \right| \frac{\partial v}{\partial \bar{\xi}} =$$

$$= -\beta J \frac{\partial v}{\partial \bar{\xi}} + \bar{U} \frac{\partial u}{\partial \bar{\xi}},$$

$$\overline{Y} = \left| \bar{x} \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{\eta}} \right| = -\beta J \frac{\partial v}{\partial \bar{\eta}} + \bar{U} \frac{\partial u}{\partial \bar{\eta}}.$$

On pourra développer, pour la surface $(\bar{x})$, ce qui a été fait pour la surface (x). D'une manière précise, on pourra écrire les relations (7), puis les équations (8) et (9), en surmontant d'une barre toutes les lettres, sauf u, v.

Les deux premiers transformés de Laplace de $\overline{X}$ dans le sens des η sont

$$\overline{X}_1 = \frac{\partial \overline{X}}{\partial \bar{\eta}} - \overline{X} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} (\log. \bar{b}\bar{\theta}),$$

$$\overline{X}_2 = \frac{\partial \overline{X}_1}{\partial \bar{\eta}} - \overline{X}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} (\log. \bar{b}\bar{k}_1\bar{\theta}).$$

Les deux premiers transformés de Laplace de $\overline{Y}$ dans le sens des $\bar{\xi}$ sont

$$\overline{Y}_1 = \frac{\partial \overline{Y}}{\partial \bar{\xi}} - \overline{Y} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} (\log. \bar{a}\bar{\theta}),$$

$$\overline{Y}_2 = \frac{\partial \overline{Y}_1}{\partial \bar{\xi}} - \overline{Y}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} (\log. \bar{a}, \bar{k}_1, \bar{\theta}).$$

Liège, le 12 avril 1960.