Bulletin de la Classe des sciences

Sur les congruences de M. Wassiljew

Lucien Godeaux

Résumé
Si les quadriques de Lie des deux nappes focales d'une congruence W aux foyers d'une droite se touchent le long d'une droite, il y a conservation des asymptotiques sur les différentes nappes de l'enveloppe de ces quadriques.

COMMUNICATION D'UN MEMBRE.

GÉOMÉTRIE PROJECTIVE DIFFÉRENTIELLE

Sur les congruences de M. Wassiljew,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Si les quadriques de Lie des deux nappes focales d'une congruence W aux foyers d'une droite se touchent le long d'une droite, il y a conservation des asymptotiques sur les différentes nappes de l'enveloppe de ces quadriques.

Dans son bel ouvrage sur la théorie des congruences de droites [1], M. Finikow étudie, sous le nom de congruences de Wassiljew, des congruences de droites telles que les quadriques de Lie des nappes focales aux foyers d'une même droite se touchent le long d'une génératrice commune. Ces congruences sont des congruences W.

Les développements de M. Finikow sont analytiques. En supposant au départ que la congruence est W, on peut obtenir rapidement des propriétés des congruences envisagées en utilisant les méthodes que nous avons développées antérieurement [2]. C'est ce que nous nous proposons de montrer dans cette courte note.

Nous utilisons les notations et les résultats de notre *Exposé* qui vient d'être cité.

(1) S. P. FINIKOW, *Theorie der Kongruenzen*. Traduit du Russe par G. BOL (Akademie-Verlag, Berlin, 1859).

(2) *Sur la théorie des surfaces et l'espace réglé*, Actualités scientifiques, n° 138 (Paris, Hermann, 1934).

1. Soit (j) une congruence W dont nous désignerons par (x), $(\bar{x})$ les surfaces focales et soient u, v les asymptotiques de ces surfaces.

Représentons par

$$\ldots, U_n, \ldots, U_1, U, V, V_1, \ldots, V_n, \ldots, \tag{L}$$

$$\ldots, \bar{U}_n, \ldots, \bar{U}_1, \bar{U}, \bar{V}, \bar{V}_1, \ldots, \bar{V}_n, \ldots \tag{$\bar{\mathrm{L}}$}$$

les suites de Laplace associées dans l'espace S_5 aux surfaces focales (x), $(\bar{x})$.

Le point J représentant la droite j sur l'hyperquadrique Q de Klein de S_5, est l'intersection des droites UV, $\bar{U}\bar{V}$. Il appartient à une suite de Laplace

$$\ldots, J_n, \ldots, J_1, J, J_{-1}, \ldots, J_{-n}, \ldots \tag{$\mathcal{J}$}$$

inscrite dans les suites L, $\bar{\mathrm{L}}$. Le point J_n appartient aux droites U_nU_{n-1}, $\bar{U}_n\bar{U}_{n-1}$ et le point J_{-n} aux droites V_nV_{n-1}, $\bar{V}_n\bar{V}_{n-1}$.

La quadrique de Lie Φ attachée au point x de la surface (x) est associée aux plans UU_1U_2 et VV_1V_2. Les sections de Q par ces plans représentent les génératrices rectilignes des deux modes de Φ. De même, la quadrique de Lie $\overline{\Phi}$ attachée au point $\bar{x}$ de la surface $(\bar{x})$ est associée aux plans $\bar{U}\bar{U}_1\bar{U}_2$, $\bar{V}\bar{V}_1\bar{V}_2$.

Les plans UU_1U_2, $\bar{U}\bar{U}_1\bar{U}_2$ ont en commun la droite J_1J_2 qui coupe Q en deux points M_1, M_2 et les plans VV_1V_2, $\overline{V}\overline{V}_1\overline{V}_2$ une droite $J_{-1}J_{-2}$ coupant Q en deux points N_1, N_2. Aux points M_1, M_2 correspondent deux droites m_1, m_2 et aux points N_1, N_2 deux droites n_1, n_2. Ces quatre droites forment l'intersection des quadriques Φ, $\overline{\Phi}$ et sont les côtés d'un quadrilatère gauche. D'une manière précise, les droites m_1, m_2 sont des génératrices de même mode que xx^{10} sur Φ et de même mode que $\bar{x}\bar{x}^{10}$ sur $\overline{\Phi}$. Les droites n_1, n_2 sont des génératrices de Φ, $\overline{\Phi}$ respectivement de même mode que xx^{01}, $\bar{x}\bar{x}^{01}$.

2. Pour que la congruence (j) soit une congruence de M. Wassiljew, il faut que les quadriques de Lie Φ, $\overline{\Phi}$ se touchent le long d'une génératrice, par exemple le long d'une génératrice de même mode que xx^{10}, $\bar{x}\bar{x}^{10}$. En d'autres termes, les droites m_1, m_2

doivent être confondues en une droite m et la droite J_1J_2 doit toucher l'hyperquadrique Q en un point M, image de m.

Supposons en premier lieu que, lorsque u, v varient, le point M décrive une surface (M), ce qui est le cas général.

Lorsque u, v varient, la droite J_1J_2 engendre une congruence dont les nappes focales sont les surfaces (J_1), (J_2). Actuellement, cette droite touche la surface (M) et celle-ci est donc une des surfaces focales. La surface (M) ne peut coïncider avec (J_1) car le point J_1 appartient à la droite UU_1 qui ne rencontre Q qu'au point U (où il y a contact). Par conséquent, la surface (M) coïncide avec (J_2).

La droite U_1U_2 coupe Q en deux points dont l'un est le point M, qui engendre un réseau conjugué à la congruence (U_1U_2). C'est, comme nous l'avons établi, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait conservation des asymptotiques sur les différentes nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie Φ de la surface (x). De même, il y a conservation des asymptotiques sur les nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie $\overline{\Phi}$ de la surface $(\bar{x})$.

Observons que le second point M' d'intersection de la droite U_1U_2 avec Q engendre également un réseau conjugué à la congruence (U_1U_2). Le second transformé de Laplace de M' dans le sens des u est un point J' de la droite UV, engendrant un réseau conjugué à la congruence (UV). La droite j', qu'il représente, engendre une congruence W dont (x) est une surface focale. Si J'_1, J'_2 sont les deux premiers transformés de Laplace de J' dans le sens des v, J'_2 coïncide avec M' et la droite $J'_1J'_2$ touche Q au point $M' = J'_2$. La congruence (j') est également une congruence de M. Wassiljew (1).

Il y a conservation des asymptotiques sur les différentes nappes des enveloppes des quadriques de Lie des nappes focales d'une congruence de M. Wassiljew. Chacune de ces surfaces est nappe focale d'une seconde congruence de M. Wassiljew.

3. On peut arriver rapidement, analytiquement, aux résultats précédents.

(1) En partant des points d'intersection de la droite V_1V_2 avec Q_1 on obtiendrait encore deux autres congruences de M. Wassiljew ayant (x) comme surface focale.

Nous pouvons écrire

$$J = \lambda U - \mu V$$

avec

$$\mu^{10} + 2b\lambda = 0, \qquad \lambda^{01} + 2a\mu = 0.$$

En posant

$$\mu_1 = \mu^{01} - \mu\,(\log b)^{01}, \quad \mu_2 = \mu_1^{01} - \mu_1\,(\log bh_1)^{01},$$

on a

$$J_1 = \mu U_1 - \mu_1 U, \qquad J_2 = \mu_1 U_2 - \mu_2 U_1.$$

La condition pour que la droite J_1J_2 touche Q s'écrit

$$\mu_1^2 + \beta\mu^2 - 2\mu[\mu_2 + \mu_1\,(\log_1\,bh_1)^{01} + \beta\mu] = 0. \tag{1}$$

En dérivant cette relation par rapport à u, on a

$$b\lambda[\mu_2 + \mu_1\,(\log\,bh)^{01} + \beta\mu] = 0$$

et comme $b\lambda$ n'est pas nul, on a

$$\mu_2 + \mu_1\,(\log\,bh_1)^{01} + \beta\mu = 0.$$

Par (1), on obtient

$$\mu_1^2 + \beta\mu^2 = 0. \tag{2}$$

Un calcul simple montre que l'on a

$$\Omega(J_1, J_2) = 0,\ \Omega(J_2,\ J_2) = 0,\ M = J_2.$$

En dérivant la relation (2) par rapport à v, on trouve

$$(\log b^2\beta)^{01} = 0,$$

condition analytique nécessaire et suffisante pour qu'il y ait conservation des asymptotiques sur les différentes nappes de l'enveloppe des quadriques de Lie de la surface (x).

4. Supposons maintenant que le lieu de M soit une courbe. Celle-ci remplace une surface focale de la congruence (J_1J_2) et J_2 coïncide encore avec M. La suite $\mathcal{J}$ s'arrête au point J_2 en présentant soit le cas de Laplace, soit le cas de Goursat.

Supposons en premier lieu que ce soit le cas de Laplace. Le point M ne dépend alors que de v.

Les tangentes aux courbes v aux points d'une courbe u de la surface (J_1) forment un cône dont le sommet est un point M. Par conséquent, les tangentes aux courbes v aux points d'une courbe u de la surface (U_1) passent également par le même point M. On en conclut que le point U_2 coïncide également avec M et que la suite L s'arrête au point U_2 en présentant le cas de Laplace.

Il en est de même de la suite $\bar{L}$.

5. Supposons que la suite $\mathcal{J}$ s'arrête au point J_2 en présentant le cas de Goursat. Le point M ne dépend que de u.

Les tangentes aux courbes v aux points d'une courbe u de la surface (J_1) sont tangentes à la courbe (M) et forment donc une développable dont (M) est l'arête de rebroussement. On en conclut que cette développable est précisément la surface (J_1).

Considérons une courbe u de la surface (U_1) et les tangentes aux courbes v aux points de cette courbe u. Ces tangentes doivent rencontrer la courbe (M) en des points variables. Si nous considérons une courbe v de la même surface, les tangentes à cette courbe doivent passer par un point fixe de la courbe (M). Cela n'est possible que si les courbes v sur (U_1) sont les tangentes à une courbe (U_2) dont les points ne dépendent que de u. On en conclut que la suite de Laplace L s'arrête au point U_2 en présentant le cas de Goursat. La surface (U_1) est la développable d'arête de rebroussement (U_2) et la courbe (M) est tracée sur cette développable.

De même, la suite de Laplace $\bar{L}$ s'arrête au point $\bar{U}_2$ en présentant le cas de Goursat.

Liège, le 16 mars 1960.

(1) Nous avons pu démontrer récemment que si les quadriques de Lie des nappes focales d'une congruence aux foyers d'une droite se rencontrent suivant les côtés d'un quadrilatère gauche, la congruence est W. Voir une note en cours d'impression dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques*.