Bulletin de la Classe des sciences

Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique zéro dont le système bicanonique est irréductible

Lucien Godeaux

Résumé

On démontre que sur une surface de genres Pa = Pg = 0, 2 < P2 < 10, à système bicanonique irréductible, il existe une courbe (non canonique) Γ telle que 2 Γ soit une courbe bicanonique, Γ+ Γ des courbes tricanoniques, 2 Γ des courbes tétracanoniques. La surface est l'image d'une involution du second ordre privée de points unis appartenant à une surface régulière de genre Pg = 1.

COMMUNICATIONS DES MEMBRES

GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE.

Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique zéro dont le système bicanonique est irréductible,

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — On démontre que sur une surface de genres $p_a = p_g = 0$, $2 < P_2 \leqslant 10$, à système bicanonique irréductible, il existe une courbe (non canonique) Γ telle que 2Γ soit une courbe bicanonique, $\Gamma + \Gamma'$ des courbes tricanoniques, $2\Gamma'$ des courbes tétracanoniques. La surface est l'image d'une involution du second ordre privée de points unis appartenant à une surface régulière de genre $p_g = 1$.

Poursuivant nos recherches sur les surfaces algébriques de genres $p_a = p_g = 0$ dont le système bicanonique est irréductible (1), nous considérons ici les surfaces dont le bigenre P_2 est supérieur à deux et, comme nous l'avons montré ailleurs, au plus égal à dix (2).

Nous établissons le théorème suivant : *Une surface algébrique*

(1) *Sur les surfaces de genres géométrique et arithmétique nuls possédant un faisceau de courbes canoniques irréductibles* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1958, pp. 738-749, 942-944), *Sur les surfaces de genres arithmétique et géométrique nuls possédant une courbe canonique effective* (*Idem*, 1958, pp. 809-812), *Sulle superficie algebriche di genere zero e di bigenere uno* (BOLLETTINO DELL' UNIONE MATEMATICA ITALIANA, 1958, pp. 531-534), *Sur les surfaces de genres zéro possédant un réseau irréductible de courbes bicanoniques* (BULLETIN DE L'ACAD. ROY. DE BELGIQUE, 1959, pp. 52-58, 59-68, 188-196).

(2) Voir notre exposé sur *Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls* (Actualités scientifiques, N° 123, Paris, Hermann, 1934). Voir page 33.

de genres $p_a = p_g = 0$, $P_2 > 2$, *dont le système bicanonique est irréductible, ce système et le système tétracanonique étant simples, contient une courbe dont le double est une courbe bicanonique sans qu'elle soit une courbe canonique, le genre de cette courbe étant égal à* P_2.

Nous arrivons à ce résultat en montrant qu'il existe au moins une courbe octocanonique formée d'une part de deux courbes tétracanoniques et d'autre part d'une courbe tricanonique et d'une courbe pentacanonique qui ne soit pas formée d'une courbe tricanonique jointe à une courbe bicanonique.

Nous démontrons ensuite que : *Si une surface algébrique de genres* $p_a = p_g = 0$, $P_2 = \pi > 2$, *dont le système bicanonique est irréductible, existe, elle est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres* $p_a = p_g = 1$, $p^{(1)} = 2\pi - 1$, $P_2 = 2\pi$.

1. Soit F une surface algébrique de genres $p_a = p_g = 0$ possédant un système bicanonique $|C_2|$ irréductible. Nous désignerons par π le genre linéaire de F, dont le bigenre est par conséquent $P_2 = \pi$. De plus, nous supposerons que les systèmes bicanonique et tétracanonique sont simples.

Considérons le modèle projectif F_4 de F dont les sections hyperplanes sont les courbes tétracanoniques C_4. La surface F_4 appartient à un espace S_r linéaire, à $r = 6(\pi - 1)$ dimensions ; elle est d'ordre $16(\pi - 1)$ et ses sections hyperplanes C_4 sont de genre $10(\pi - 1) + 1$.

Les hyperquadriques V^2_{r-1} de S_r qui ne contiennent pas F_4 découpent sur cette surface des courbes octocanoniques C_8. Le système $|C_8|$ a la dimension $P_8 - 1 = 28(\pi - 1)$. Les hyperquadriques de S_r linéairement indépendantes sont au nombre de $(3\pi - 2)(6\pi - 5)$. Si toutes les courbes du système $|C_8|$ sont découpées sur F_4 par des hyperquadriques, le nombre de celles-ci, linéairement indépendantes, qui contiennent F_4 est égal à

$$(3\pi - 2)(6\pi - 5) - P_8 =$$
$$(3\pi - 2)(6\pi - 5) - 28(\pi - 1) - 1 = (\pi - 1)(18\pi - 37).$$

Ce nombre est positif pour $\pi > 2$, ce que nous supposerons désormais.

2. Supposons que la surface F_4 puisse appartenir à $(\pi - 1)(18\pi - 37) + \delta$ hyperquadriques linéairement indépendantes $(\delta > 0)$. Les courbes C_8 découpées sur F_4 par des hyperquadriques forment un système linéaire de dimension $28(\pi > 1) - \delta$ et il y a par conséquent, dans $|C_8|$, un système linéaire que nous désignerons par $|\overline{C}_8|$, de dimension $\delta - 1$, dont les courbes ne sont pas découpées par des hyperquadriques.

Les courbes tricanoniques C_3 sont sur F_4 d'ordre $12(\pi - 1)$ et de genre $6(\pi - 1) + 1$. Les hyperquadriques de S_r découpent sur une courbe C_3 une série linéaire d'ordre $24(\pi - 1)$ et de dimension $18(\pi - 1) - 1$. Les hyperquadriques passant par une courbe C_3 mais non par F_4 forment donc un système linéaire de dimension $10(\pi - 1) - \delta$. En dehors de C_3, ces hyperquadriques découpent sur F_4 des courbes pentacanoniques C^5. Le système $|C_5|$ a la dimension $P_5 - 1 = 10(\pi - 1)$ On en conclut qu'il existe dans $|C_5|$ un système linéaire de dimension $\delta - 1$, que nous désignerons par $|\overline{C}_5|$ dont les courbes ne sont pas situées sur des hyperquadriques.

Si nous ajoutons à une courbe $\overline{C}_5$, une courbe C_3, nous obtenons une courbe C_8 et précisément une courbe $\overline{C}_8$, car $\overline{C}_5$ n'étant pas située sur une hyperquadrique, il en est de même de $\overline{C}_5 + C_3$.

Comme la dimension de $|C_3|$ est $P_3 - 1 = 3(\pi - 1)$, en ajoutant aux $\infty^{\delta-1}$ courbes $\overline{C}_5$ les $\infty^{3(\pi-1)}$ courbes $\overline{C}_3$, on devrait trouver $\infty^{\delta-1}$ courbes $\overline{C}_8$, ce qui est absurde. On en conclut $\delta = 0$.

3. Le système $|C_8|$ contient :

a) des courbes formées de deux courbes C_4 et qui constituent un système Σ_1 de dimension $12(\pi - 1)$.

b) des courbes formées de deux courbes C_3 et d'une courbe C_2 constituant un système de dimension $7(\pi - 1)$.

c) des courbes formées d'une courbe C_5 non réductible à une courbe C_3 jointe à une courbe C_2 et d'une courbe C_3, formant un système Σ_2.

Dans le système $|C_5|$, les courbes formées d'une courbe C_3 et d'une courbe C_2, forment un système Σ de dimension $4(\pi - 1)$, par conséquent les courbes C_5 non réductibles à une courbe C_3 jointe à une courbe C_2, forment un système linéaire de dimension

$6(\pi-1)-1$. Nous le désignerons par $|\overline{C}_5|$, aucune confusion n'étant possible avec le système que nous avons désigné plus haut par ce symbole, système qui ne peut exister.

Considérons dans $|C_8|$ le système linéaire $|\overline{C}_8|$ qui ne contient aucune courbe dégénérée en deux courbes tricanoniques jointes à une courbe bicanonique ; il a la dimension $21(\pi-1)-1$.

Le système $|\overline{C}_8|$ contient les courbes du système Σ_1, de dimension $12(\pi-1)$ et les courbes du système Σ_2. Celui-ci a la dimension $9(\pi-1)-1$. On a

$$12(\pi-1)+9(\pi-1)-1=21(\pi-1)-1,$$

donc les systèmes Σ_1 et Σ_2 ont au moins une courbe commune.

En d'autres termes, il existe au moins une courbe C_8 formée d'une part de deux courbes tétracanoniques C_4 et d'autre part d'une courbe tricanonique C_3 jointe à une courbe pentacanonique $\overline{C}_5$ non formée d'une courbe C_3 et d'une courbe C_2.

4. Pour qu'une courbe C_4+C_4 coïncide avec une courbe $C_3+\overline{C}_5$, il faut que C_3 se décompose en deux courbes Γ, Γ_1 ; $\overline{C}_5$ en deux courbes X, X_1 et que les deux courbes C_4 soient $\Gamma+X$, Γ_1+X_1, les courbes Γ, Γ_1 étant distinctes ou coïncidentes. Plaçons-nous dans le premier cas ; nous avons donc

$$C_3\equiv\Gamma+\Gamma_1,\quad \overline{C}_5\equiv X+X_1,\quad C_4\equiv\Gamma+X\equiv\Gamma_1+X_1.$$

$|C_4|$ étant l'adjoint à $|C_3|$, on a

$$C_4\equiv\Gamma'+\Gamma_1=\Gamma+\Gamma_1',$$

ce qui montre que $X\equiv\Gamma_1'$, $X_1\equiv\Gamma'$.

Par conséquent, on a

$$C_3\equiv\Gamma+\Gamma_1,\quad \overline{C}_5\equiv\Gamma'+\Gamma_1',\quad C_4\equiv\Gamma'+\Gamma_1\equiv\Gamma_1'+\Gamma.$$

Les courbes C_4 passant par Γ_1 doivent découper sur Γ la série canonique complète de cette courbe, puisque F est régulière. Cette série ne peut avoir de points fixes et deux cas peuvent se présenter :

La courbe Γ_1 ne rencontre pas la courbe Γ, ou

La courbe Γ_1 rencontre la courbe Γ suivant un groupe canonique de celle-ci.

Envisageons la première hypothèse.

Soient r_1, r_2 les dimensions des séries découpées par les courbes C_4 respectivement sur Γ, Γ_1. Désignons par π_1, π_2 les genres de ces courbes.

Les courbes C_4 passant par Γ forment un système de dimension $6(\pi - 1) - r_1 - 1$ qui doit coïncider avec l'adjoint $|\Gamma_1'|$ à $|\Gamma_1|$, de dimension $\pi_2 - 1$. On a donc $r_1 + \pi_2 = 6(\pi - 1)$ et de même, $r_2 + \pi_1 = 6(\pi - 1)$. La courbe $\Gamma + \Gamma_1$ étant de genre $6(\pi - 1) + 1$ et les courbes Γ, Γ_1 ne se rencontrant pas, on a

$$\pi_1 + \pi_2 = 6(\pi - 1) + 2,$$

d'où

$$r_1 + r_2 + 2 = 6(\pi - 1).$$

Mais alors, il existerait une courbe C_4 passant par $r_1 + 1$ points de Γ et par $r_2 + 1$ points de Γ_1 et la courbe $\Gamma + \Gamma_1$ appartiendrait à une courbe C_4, ce qui est impossible puisque $p_g = 0$.

On en conclut que l'hypothèse où Γ et Γ_1 ne se rencontrent pas est à exclure.

5. Supposons maintenant que Γ_1 rencontre Γ suivant un groupe canonique de celle-ci. Nous poserons $\Gamma_1 \equiv \Gamma' + X$, X étant une courbe isolée qui ne rencontre pas Γ. Nous avons

$$C_3 \equiv \Gamma + \Gamma' + X,$$

$$C_4 \equiv 2\Gamma' + X, \quad C_5 \equiv \Gamma' + \Gamma'' + X \equiv \Gamma + \Gamma' + X + C_2.$$

En écrivant que

$$C_3 + C_5 \equiv 2C_4,$$

on obtient

$$C_2 + 2\Gamma \equiv 2\Gamma', \tag{1}$$

d'où l'on tire

$$C_2 \equiv 2\Gamma + X. \tag{2}$$

De (1), on tire $[\Gamma, C_2] = 4(\pi_1 - 1) - 2n_1$ et de (2), $[\Gamma, C_2] = 2n_1$, d'où

$$n_1 = \pi_1 - 1,$$

n_1 et π_1 étant le degré et le genre de Γ.

De (2), on tire

$$[C_2, X] = 4(\pi - 1 - n_1) = 4(\pi - \pi_1).$$

De $\Gamma' + X \equiv \Gamma + X$, on déduit

$$2X' \equiv C_2 + 2X, \quad \text{ou} \quad 2X' \equiv 2\Gamma + 3X.$$

Par suite, si n', π' sont le degré et le genre de X, on a

$$4(\pi' - 1) = 3n'.$$

La courbe X étant isolée, on doit avoir $n' - \pi' + 1 \leqslant 0$, d'où $\pi' - 1 \leqslant 0$. On ne peut avoir $\pi' = 0$, car alors on aurait $3n' + 4 = 0$, ce qui est absurde. On a donc $\pi' = 1$, $n' = 0$ et par conséquent $[X, C_2] = 0$, $n_1 = \pi - 1$, $\pi_1 = \pi$. On a en outre $[\Gamma' X] = 0$ et par conséquent la courbe X ne rencontre aucune des courbes $C_2, C_3, C_4, \ldots$ On en conclut que la courbe X n'existe pas.

Cela étant, on a

$$C_2 \equiv 2\Gamma, \quad C_3 \equiv \Gamma + \Gamma', \quad C_4 \equiv 2\Gamma', \quad C_5 \equiv 3\Gamma + \Gamma', \ldots$$

De plus, on a

$$C_4 \equiv 2C_2 \equiv 2\Gamma',$$

mais on ne peut avoir $C_2 \equiv \Gamma'$, donc le diviseur de Severi de F est pair. On a encore $\pi_1 = \pi$, $n_1 = \pi - 1$.

6. Reste à examiner le cas où les courbes Γ, Γ_1 coïncident, c'est-à-dire où l'on a

$$C_3 \equiv 2\Gamma, \quad C_4 \equiv \Gamma + \Gamma', \quad C_5 \equiv 2\Gamma'.$$

Observons tout d'abord que la courbe Γ ne peut appartenir à une courbe C_2. Supposons en effet que l'on puisse avoir $C_2 \equiv \Gamma + X$. On en déduit $C_3 \equiv \Gamma + X'$, d'où $X' \equiv \Gamma$. On peut donc écrire $C_2 \equiv X + X'$, $C_3 \equiv 2X'$, $C_4 \equiv 2X + 2X'$, $C_5 \equiv X +$

$3X'$. En écrivant que l'on a $C_3 + C_5 \equiv 2C_4$, on trouve $X + 5X' \equiv 4X + 4X'$, d'où $X' \equiv 3X$, $X' - X \equiv 2X$, ce qui est incompatible avec $p_g = 0$.

On a d'ailleurs, en considérant le système $|C_{12}| = |4C_3| = |3C_4|$, la relation

$$5\Gamma \equiv 3\Gamma'.$$

Soient n_1 et π_1 le degré et le genre de la courbe Γ. En considérant les intersections de C_3, C_4 avec Γ, on trouve

$$4n_1 = 9(\pi - 1), \quad n_1 + 2(\pi_1 - 1) = 6(\pi - 1)$$

d'où $8(\pi_1 - 1) = 15(\pi - 1)$. Nous sommes donc conduit à poser $\pi - 1 = 8\theta$, d'où $n_1 = 18\theta$, $\pi_1 - 1 = 15\theta$.

Nous avons supposé $\pi > 2$ et d'autre part $P_2 \leqslant 10$, donc $\pi \leqslant 10$; nous avons donc nécessairement $\theta = 1$, d'où

$$\pi = 9, \quad n_1 = 18, \quad \pi_1 = 16.$$

D'après le théorème de Riemann-Roch, la courbe Γ appartient à un système linéaire de dimension $r \geqslant 3$.

Considérons le modèle bicanonique F_2 de la surface F, c'est-à-dire la surface d'ordre $4(\pi - 1) = 32$, située dans un espace S_8 à huit dimensions, dont les sections hyperplanes sont les courbes bicanoniques C_2. La courbe Γ, d'ordre 24, ne peut appartenir à un hyperplan.

Les hyperquadriques V_7^2 de S_8 découpent sur F_2 des courbes tétracanoniques C_4. Le nombre de ces hyperquadriques linéairement indépendantes est égal à 45. Le tétragenre de F est $P_4 = 49$. Supposons que F_2 appartienne à k hyperquadriques linéairement indépendantes. Dans ces conditions, il y a dans $|C_4|$ un système linéaire partiel que nous désignerons par $|\overline{C}_4|$, de dimension $3 + k$, dont les courbes ne sont pas découpées par des hyperquadriques.

Sur une courbe Γ, les hyperquadriques découpent une série linéaire d'ordre 48 et de dimension 32. Il y a donc ∞^{11} hyperquadriques passant par une courbe Γ et précisément ∞^{11-k} hyperquadriques ne contenant pas F_2. En dehors de Γ, ces hyperquadriques découpent sur F_2 des courbes Γ'. Or, le système $|\Gamma'|$, puisque F est régulière, a la dimension 15. On en conclut que dans $|\Gamma'|$, il existe un système partiel que nous désignerons par $|\overline{\Gamma}'|$, de dimension $3 + k$, dont les courbes ne sont pas découpées par des hyperquadriques passant par une courbe Γ.

Une courbe $\bar{\Gamma}'$, jointe à une courbe Γ, donne une courbe C_4. La courbe $\overline{\Gamma}'$ ne peut appartenir à une hyperquadrique, donc la courbe considérée $\overline{\Gamma}' + \Gamma$, est précisément une courbe $\overline{C}_4$. Les courbes $\overline{\Gamma}' + \Gamma$ considérées sont en nombre ∞^{r+k+3}, où l'on a $r + k + 3 \geqslant 6 + k$, alors que le système $|\overline{C}_4|$ a la dimension $3 + k$. Nous parvenons donc à une absurdité et il ne peut par suite exister une courbe Γ telle que $C_3 \equiv 2\Gamma$.

7. Nous voyons donc qu'en résumé, la surface F contient une courbe Γ, de genre π et de degré $\pi - 1$, non canonique, telle que 2Γ soit une courbe bicanonique C_2. Cette seule condition entraîne

$$C_3 \equiv \Gamma + \Gamma', \quad C_4 \equiv 2\Gamma', \quad C_5 \equiv 3\Gamma + \Gamma', \quad C_3 + C_5 \equiv 2C_4$$

car on a $2\Gamma' \equiv 4\Gamma$.

On peut remarquer que sur la surface F, à côté des systèmes $|C_2|, |C_3|, |C_4|, \ldots$ on a des systèmes de même genre et de même degré. Appelons ces systèmes $|\Gamma_2|, |\Gamma_3|, |\Gamma_4|, \ldots$. On a

$$\begin{aligned} C_2 &\equiv 2\Gamma, & \Gamma_2 &\equiv \Gamma', \\ C_3 &\equiv \Gamma + \Gamma', & \Gamma_3 &\equiv 3\Gamma, \\ C_4 &\equiv 2C_2 \equiv 4\Gamma, & \Gamma_4 &\equiv 2\Gamma + \Gamma', \\ C_5 &\equiv 3\Gamma + \Gamma, & \Gamma_5 &\equiv 5\Gamma. \end{aligned}$$

D'une manière générale, on a, pour n 0,

$$\begin{aligned} C_{2n} &\equiv 2n\Gamma, & \Gamma_{2n} &\equiv (2n-2)\Gamma + \Gamma', \\ C_{2n+1} &\equiv (2n-1)\Gamma + \Gamma', & \Gamma_{2n+1} &\equiv (2n+1)\Gamma. \end{aligned}$$

La surface F a le nombre-base $\rho = 1$, le diviseur de Severi $\sigma = 2$ et les courbes Γ, Γ' constituent une base-minima.

8. Le système $|\Gamma'|$ a le genre $3(\pi - 1) + 1$, le degré $4(\pi - 1)$ et, comme Γ est de genre π, la dimension $\pi - 1$. Rapportons projectivement les courbes Γ' aux hyperplans d'un espace linéaire

$S_{\pi-1}$ à $\pi - 1$ dimensions. Il correspond à F une surface F'_2 d'ordre $4(\pi - 1)$.

Aux courbes C_2 correspondent sur F'_2 des courbes que nous désignerons encore par C_2, d'ordre $4(\pi - 1)$. A la courbe Γ correspond une courbe Γ d'ordre $2(\pi - 1)$, qui est une courbe projectivement canonique de $S_{\pi-1}$.

Les hyperquadriques $V^2_{\pi-2}$ de $S_{\pi-1}$ découpent, sur F'_2, des courbes tétracanoniques $C_4 = 2\Gamma'$. Il en résulte qu'il y a une hyperquadrique touchant F'_2 le long de chaque courbe C_2.

Soient $x_0, x_1, \dots, x_{\pi-1}$ les coordonnées projectives homogènes de $S_{\pi-1}$ et

$$\varphi_1(x_0, x_1, \dots, x_{\pi-1}) = 0, \qquad \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_{\pi-3} = 0$$

les équations de F'_2,

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{\pi-1}) = 0$$

l'équation de l'hyperquadrique touchant F'_2 le long d'une courbe C_2.

Considérons, dans un espace S_π, la surface Φ d'équations

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_{\pi-3} = 0, x_\pi^2 = f.$$

A priori la surface Φ pourrait se décomposer en deux surfaces unisécantes des génératrices du cône, de $S\pi$, d'équations $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \dots, \varphi_{\pi-3} = 0$. Nous allons montrer qu'il n'en est rien.

Considérons, dans l'hyperplan $x_{\pi-1} = 0$ de S_π, le cône H d'équations

$$\varphi_1(x_0, x_1, \dots, x_{\pi-2}, 0) = 0, \varphi_2 = 0, \dots, \varphi_{\pi-3} = 0$$

et le faisceau d'hypersurfaces

$$x_\pi^2 + \lambda f(x_0, x_1, \dots, x_{\pi-2}, 0) = 0$$

Soient K les courbes découpées sur le cône H par les hypersurfaces de ce faisceau. Pour $\lambda = 0$, la courbe K se réduit à la section K_2 du cône par $x_\pi = 0$ comptée deux fois. Pour $\lambda = \infty$, elle se réduit à une courbe que nous désignerons par K_1, comptée deux fois également.

La courbe K_2 est une courbe Γ' et la courbe K_1 une courbe C_2.

Si la courbe K se décomposait en deux courbes unisécantes des génératrices rectilignes du cône H, les courbes K_1 et K_2 devraient découper, sur une de ces courbes, des groupes équivalents, ce qui n'est certainement pas le cas, puisqu'une courbe Γ' et une courbe C_2 ne peuvent appartenir à un même faisceau. Il en résulte que la courbe K est irréductible et que, par suite, il en est de même de la surface Φ (1).

Nous voyons donc que la surface F — si elle existe — est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à la surface Φ.

9. Si nous désignons par p_a le genre arithmétique de F et par p'_a celui de Φ, nous avons (2)

$$p'_a + 1 = 2(p_a + 1),$$

d'où, comme $p_a = 0$, $p'_a = 1$. Le genre arithmétique de Φ est égal à l'unité.

Désignons par K_1, K_2, $\overline{K}_2$ les courbes qui correspondent sur Φ respectivement aux courbes Γ, C_2, Γ'. La courbe K_1 est de genre $2(\pi - 1) + 1$.

Les courbes Γ' découpant sur Γ la série canonique $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$, les courbes K_2 découpent sur K_1 une série $g^{\pi-1}_{4\pi-4}$ appartenant à la série canonique.

Les courbes C_2 découpent sur Γ une série paracanonique $g^{\pi-2}_{2\pi-2}$, car $|C_2|$ a la dimension $\pi - 1$ et contient la courbe 2Γ. Les courbes K_2 découpent sur K_1 une série $g^{\pi-2}_{4\pi-4}$ et le système $|K_2|$ contient la courbe $2K_1$.

Le système $|K_2|$ a le genre $6(\pi - 1) + 1$ et le degré $8(\pi - 1)$, par conséquent, d'après le théorème de Riemann-Roch, sa di-

(1) Ce raisonnement est analogue à celui fait par F. ENRIQUES dans sa note *Un'osservazione relativa alle superficie di bigenere uno* (RENDICONTO DELLA ACCADEMIA DI BOLOGNA, 1908, pp. 1-8) où il démontre que la surface de genres $p_a = P_3 = 0$, $P_2 = 1$ est l'image d'une involution du second ordre, privée de points unis, appartenant à une surface de genres $p_a = P_4 = 1$.

(2) *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique* (BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, 1919, pp. 1-16). Voir aussi notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (Actualités scientifiques, N° 270, Paris, Hermann, 1935).

mension est au moins égale à $2\pi - 1$. Comme ce système contient la courbe $2K_1$, les courbes K_2 découpent sur la courbe K_1 une série d'ordre $4(\pi - 1)$ et de dimension au moins égale à $2(\pi - 1)$, qui ne peut être que la série canonique, dont la dimension est exactement $2(\pi - 1)$.

On en conclut que $K_1 \equiv K_2 - K_1$ est une courbe canonique de Φ et que, de plus, les systèmes $|K_2|$ et $|\overline{K}_2|$ coïncident en un unique système qui est adjoint à K_1 et est donc le système bicanonique de Φ. Le bigenre de cette surface est donc $P_2 = 2\pi$.

Le système complet $|K_2|$ adjoint à K_1 découpe, sur cette courbe, la série canonique complète, donc, d'après le théorème de Picard, la surface Φ est régulière et on a $p_g = p_a = 1$. La courbe K_1 est l'unique courbe canonique de Φ.

En rapportant projectivement les courbes du système complet $|K_2|$ aux hyperplans d'un espace linéaire $S_{2\pi-1}$ à $2\pi - 1$ dimensions, on obtient un modèle bicanonique de la surface Φ, d'ordre $8(\pi - 1)$. Il existe un hyperplan qui touche la surface Φ le long de la courbe K_1.

Sur ce modèle projectif de la surface Φ, la transformation birationnelle T de Φ en soi génératrice de l'involution représentée par F, échange entre elles les sections hyperplanes, elle est donc déterminée par une homographie de l'espace $S_{2\pi-1}$. Cette homographie est harmonique et biaxiale. En effet, les courbes que nous avons désignées tantôt par K_2, $\overline{K}_2$ sont situées dans des hyperplans unis pour l'homographie. Celle-ci possède donc deux axes ponctuels qui sont des espaces à $\pi - 1$ dimensions, ne rencontrant pas Φ. L'hyperplan touchant Φ le long de K_1 passe par un des axes.

Liège, le 30 mars 1959.