Bulletin de la Classe des sciences

Une surface bicanonique de l'espace à quatre dimensions

Lucien Godeaux

Résumé
Construction d'une surface algébrique normale de l'espace à quatre dimensions possédant une courbe canonique isolée, dont le système bicanonique coïncide avec celui des section hyperplanes et dont le diviseur de Severi est égal à trois.

Une surface bicanonique de l'espace à quatre dimensions.

par LUCIEN GODEAUX,
Membre de l'Académie.

Résumé. — Construction d'une surface algébrique normale de l'espace à quatre dimensions possédant une courbe canonique isolée, dont le système bicanonique coïncide avec celui des section hyperplanes et dont le diviseur de Severi est égal à trois.

Dans cette note, nous construisons une surface algébrique normale, du douzième ordre, dans un espace à quatre dimensions, intersection complète d'une hyperquadrique et d'une hypersurface du sixième ordre. Cette surface possède une courbe canonique isolée et son système bicanonique coïncide avec celui des sections hyperplanes. De plus, son diviseur de Severi σ est égal à trois. Cette surface est régulière et ses genres ont pour valeurs (1)

$$p_a = p_g = 1, \; p^{(1)} = 4, \; P_2 = 5.$$

Nous obtenons cette surface comme image d'une involution cyclique du troisième ordre, privée de points unis, appartenant à une surface intersection de deux hypersurfaces cubiques d'un espace à quatre dimensions, surface dont le système canonique est celui des sections hyperplanes. Cette propriété est due à F. Enriques (2) ; nous en donnons une démonstration à la fin de ce travail.

(1) Notons que l'intersection complète d'une hyperquadrique et d'une hypersurface du sixième ordre dans S^4 a en général des valeurs supérieures pour les genres.

(2) ENRIQUES-CAMPEDELLI, *Lezioni sulle teoria delle superficie algebriche*, p. 335 (Padova, Cedam, 1932). F. ENRIQUES, *Le superficie algebriche*, p. 286 (Bologna, Zanichelli, 1949).

Nous supposons d'autre part connues nos recherches sur les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique (1).

1. Considérons dans un espace linéaire S_4 à quatre dimensions l'homographie H de période trois

$$x'_0 : x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_0 : \epsilon x_1 : \epsilon x_2 : \epsilon^2 x_3 : \epsilon^2 x_4,$$

où ϵ est une racine cubique primitive de l'unité, et les hypersurfaces cubiques

$$x_0(a_{00}x_0^2 + a_{13}x_1x_3 + a_{14}x_1x_4 + a_{23}x_2x_3 + a_{24}x_2x_4) + \alpha_3(x_1, x_2) + \beta_3(x_3, x_4) = 0,$$

$$x_0(a'_{00}x_0^2 + a'_{13}x_1x_3 + a'_{14}x_1x_4 + a'_{23}x_2x_3 + a'_{24}x_2x_4) + \alpha'_3(x_1, x_2) + \beta'_3(x_3, x_4) = 0$$

où α_3 β_3 α'_3, β'_3 sont des formes binaires du troisième degré.

Ces deux hypersurfaces sont transformées en elles-mêmes par l'homographie H et elles ont en commun une surface F, du neuvième ordre, sur laquelle H détermine une involution I du troisième ordre.

Les axes ponctuels de l'homographie sont le point 0_0, et les droites 0_10_2, 0_30_4. Si, comme nous le supposerons, les formes α_3, β_3, α'_3, β'_3 n'ont aucunes relations entre elles et l'une au moins des quantités a_{00}, a'_{00} est différente de zéro, la surface F ne passe pas par 0_0 et ne rencontre pas les droites 0_10_2, 0_30_4. L'involution I est donc dépourvue de points unis.

Nous désignerons par F' une surface image de l'involution.

2. Le système canonique $|K|$ de F coïncide avec celui des sections hyperplanes et d'autre part la surface est régulière. Elle a donc les genres

$$p_a = p_g = 5,\ p^{(1)} = 10,\ P_2 = 15, \ldots$$

(1) Voir notre exposé sur *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (ACTUALITÉS SCIENT., n° 270, Paris, Hermann, 1935) et notre *Mémoire sur les surfaces multiples* (MÉMOIRES IN-8° DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 1952).

Si p'_a désigne le genre arithmétique de F', on a

$$p_a + 1 = 3(p'_a + 1),$$

d'où $p'_a = 1$. La surface F' est régulière comme F, donc on a aussi $p'_g = 1$.

Le système canonique $|K|$ de F contient trois systèmes linéaires appartenant à l'involution I :

La courbe isolée K_0 découpée sur F par l'hyperplan $x_0 = 0$;

Les courbes K_1, formant un faisceau, découpées par les hyperplans $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = 0$;

Les courbes K_2, formant un faisceau, découpées par les hyperplans $\lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$.

Nous désignerons par K'_0, K'_1, K'_2 les courbes homologues sur la surface F'.

La courbe canonique de F' étant isolée, est nécessairement la courbe K'_0 dont le genre, d'après la formule de Zeuthen, est $p'^{(1)} = 4$.

La bigenre de F' est par conséquent égal à $P'_2 = 5$.

Les courbes bicanoniques de F' sont découpées par les hyperquadriques. Dans le système bicanonique, il y a trois systèmes linéaires partiels composés au moyen de l'involution I ; ce sont les systèmes

$$\lambda_{00} x_0^2 + \lambda_{13} x_1 x_3 + \lambda_{14} x_1 x_4 + \lambda_{23} x_2 x_3 + \lambda_{24} x_2 x_4 = 0, \tag{1}$$

$$\lambda_{01} x_0 x_1 + \lambda_{02} x_0 x_2 + \lambda_{33} x_3^2 + \lambda_{34} x_3 x_4 + \lambda_{44} x_4^2 = 0, \tag{2}$$

$$\lambda_{03} x_0 x_3 + \lambda_{04} x_0 x_4 + \lambda_{11} x_1^2 + \lambda_{12} x_1 x_2 + \lambda_{22} x_2^2 = 0. \tag{3}$$

3. Pour obtenir les équations d'un modèle projectif de la surface F, rapportons projectivement les hyperquadriques du premier système aux hyperplans d'un espace linéaire à quatre dimensions S'_4 en posant

$$\rho X_{00} = x_0^2, \quad \rho X_{13} = x_1 x_3, \quad \ldots, \quad \rho X_{24} = x_2 x_4. \tag{4}$$

L'élimination des x nous donne tout d'abord l'équation

$$X_{13} X_{24} - X_{14} X_{23} = 0, \tag{5}$$

qui représente une quadrique dans l'espace $X_0 = 0$ et par conséquent, dans S'_4, un cône quadratique de sommet O'_0.

Observons maintenant que le produit $\alpha_3\beta_3$ par exemple, s'exprime, par les formules (4), en un polynome du troisième ordre en X_{13}, X_{14}, X_{23}, X_{24}. Nous représenterons par φ_1, φ_2 les polynomes obtenus en parlant de $\alpha_3\beta_3'$, $\alpha_3'\beta_3$, par ψ_1, ψ_2 ceux que l'on obtient en partant de $\alpha_3\beta_3$, $\alpha_3'\beta_3'$.

Enfin, nous poserons

$$f_1 = a_{00}X_{01} + a_{13}X_{13} + \dots + a_{24}X_{24},$$

$$f_1' = a_{00}'X_0 + a_{13}'X_{13} + \dots + a_{24}'X_{24}.$$

Des équations de la surface F, on déduit alors

$$X_0[f_1f_1'(\varphi_1 + \varphi_2) - f_1^2\psi_2 - f_1'^2\psi_1] - (\varphi_1 - \varphi_2)^2 = 0. \tag{6}$$

Les équations (5) et (6) représentent la surface F'. Elle est du douzième ordre, car le système découpé sur F par les hyperquadriques (1) a le degré 36.

La courbe canonique K_0' de F' a pour équations

$$X_0 = 0, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = 0, \quad X_{13}X_{24} - X_{14}X_{23} = 0.$$

C'est une courbe du sixième ordre intersection, dans l'espace à trois dimensions $X_0 = 0$, d'une quadrique et d'une surface cubique. Elle est donc de genre quatre.

Observons que dans l'équation (6), X_0 paraît au troisième degré au plus, par conséquent l'hypersurface (6) a un point triple en O_0'. L'équation (5) représentant un cône de sommet $0_0'$, la surface F' a un point sextuple en ce point. Le cône tangent à l'hypersurface (6) en $0_0'$ a pour équation

$$a_{00}a_{00}'(\varphi_1 + \varphi_2) - a_{00}^2\psi_2 - a_{00}'^2\psi_1 = 0.$$

4. Au système bicanonique $|2K_0'|$ de F' correspond sur F l'un des systèmes découpés par (1), (2) ou (3). Comme le système bicanonique doit compter la courbe canonique comptée deux fois, c'est le système (1) qui convient. Les sections hyperplanes de F' constituent donc le système bicanonique de cette surface.

La surface F' est projectivement bicanonique.

Observons que le système bicanonique $|2K_0'|$ de F' contient les courbes $K_1' + K_2'$.

Le système découpé sur F par les hyperquadriques (2) contient les courbes $K_0 + K_1$, $2K_2$, donc sur F', le système correspondant contient les courbes $K_0' + K_1'$, $2K_2'$. De même, au système découpé sur F par les hyperquadriques (3) correspond sur F' un système contenant les courbes $K_0' + K_2'$, $2K_1'$.

5. A une courbe K correspond sur F' une courbe K' de genre dix, possédant neuf points doubles, correspondant aux couples de points de la courbe K appartenant à des groupes de l'involution I. Les courbes K' décrivent un système rationnel et appartiennent donc totalement à un système linéaire $|K'|$ de genre 19 et de degré 27.

Lorsqu'une courbe K tend d'une manière continue vers une des courbes K_0, K_1, K_2, la courbe K' correspondante tend vers l'une des courbes $3K_0'$, $3K_1'$, $3K_3'$. On a donc

$$|K'| = |3K_0'| = |3K_1'| = |3K_2'|,$$

Par conséquent, *la Surface* F' *a le diviseur de Severi* $\sigma = 3$.

Les courbes K_1' et K_2' ont également le genre quatre et le degré trois.

Les caractères de la surface F' sont donc

$$p_a = p_g = 1, \quad p^{(1)} = 4, \quad P_2 = 5.$$

6. Nous allons maintenant démontrer le théorème de F. Enriques suivant lequel l'intersection complète de deux hypersurfaces cubiques dans un espace à quatre dimensions est une surface projectivement canonique.

Soient donc V_3^3, $V_3'^3$ deux hypersurfaces cubiques de S_4 et F la surface intersection complète, d'ordre neuf.

Les sections hyperplanes de F sont des courbes d'ordre neuf et de genre dix. Si l'on représente la surface cubique intersection de V_3^3 par un hyperplan ξ sur un plan σ par les cubiques planes passant par six points, à la section de cette surface par $V_3'^3$ correspond dans ce plan σ une courbe du neuvième ordre ayant six points triples. Les adjointes à ces courbes sont des sextiques ayant six points doubles et par conséquent les hyperquadriques de S_4 découpent sur la surface F les adjointes aux sections hyperplanes C de F. Ce système adjoint $|C'|$ a la dimension 14.

Comme il y a ∞^9 hyperquadriques de S_4 qui ne contiennent pas un hyperplan déterminé, les courbes C' découpent sur une courbe C la série canonique complète. On a donc $|C'| = |2C|$ et par suite $|C|$ est le système canonique de F. Cette surface a les genres $p_a = p_g = 5, p = 10, P_2 = 15$.

Liège, le 13 février 1960.