EXTRAIT DE L'*Enseignement mathématique*, N° 2, 11e ANNÉE, MARS 1909.

SUR UNE CLASSE DE CONGRUENCES DE DROITES

1. — Les déterminants du type

$$\text{(I)} \qquad \left| a^{n-i}_{ik,y} a^{i}_{ik,z} \right| = 0 \qquad (i, k = 0, \ldots n)$$

où a_y, a_z sont des formes linéaires quaternaires, peuvent s'écrire en fonction des coordonnées pluckériennes de la droite. On peut donc dire que (I) représente un complexe de droites d'ordre $\frac{n(n+1)}{2}$. De tels complexes ont été rencontrés par M. NEUBERG[1] et par nous[2].

De même, l'évanouissement d'une matrice

$$\text{(II)} \qquad \left\| a^{n-i}_{iky} a^{i}_{ikz} \right\| = 0 \qquad (i = 0, \ldots, n, k = 0, \ldots, n+1),$$

représente une congruence réglée dont nous allons déterminer l'ordre et la classe au moyen des méthodes de MM. GIAMBELLI[3] et STUYVAERT[4].

2. — Pour trouver l'ordre μ, supposons les y fixes dans la matrice (II). Cette matrice doit représenter un nombre fini de droites lorsqu'on considère les z comme les coordonnées courantes.

Supposons que le plan $z_4 = 0$ n'est pas un plan singulier

[1] *Mathesis*, 1902, II3.
[2] *Bul. de l'Acad. de Belgique*, 1907. — *N. A. M.* 1907, VII4. — *Mémoires de la Soc. des Sc. du Hainaut*, 1908, IX6.
[3] *Mém. Ist. Lomb.*, 1904. — XI3.
[4] *Mém. Soc. Sc. Liège*, 1908. — VII3.

de la congruence. Si nous faisons $z_4 = 0$ dans (II), le nombre de solutions (z_1, z_2, z_3) sera l'ordre de la congruence.

On a

$$\mu = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \mu',$$

μ' étant le nombre de solutions de la matrice

$$\left\| a_{iky}^{n-i} a_{ikz}^{i} \right\| = 0 . \qquad (i = 0, \ldots, n, k = 0, \ldots, n-1)$$

De même, si μ'' est le nombre de solutions de la matrice

$$\text{(III)} \qquad \left\| a_{iky}^{n-i} a_{ikz}^{i} \right\| = 0 \qquad (i = 0, \ldots, n-2, k = 0, \ldots, n-1),$$

on a

$$\mu' = \frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{4} - \mu''.$$

De là

$$\mu = \frac{n}{2}(2n^2 - n + 1) + \mu''.$$

L'analogie en z de (II) et (III) permet de conclure à la formule

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_{i=0} (n-2i)[2(n-2i)^2 - (n-2i) + 1],$$

la sommation s'étendant jusqu'au premier terme nul ou négatif.

3. — Pour trouver la classe ν, cherchons d'abord l'ordre-classe $\lambda = \mu + \nu$.

Supposons que les droites

$$y_1 = y_2 = 0, \qquad z_3 = z_4 = 0$$

soient indépendantes de la congruence (II).

Introduisons ces hypothèses dans la matrice (II), et posons, σ et τ étant deux facteurs de proportionnalité

$$\sigma y_3 = \rho_1, \qquad \tau z_1 = \rho_2,$$
$$\sigma y_4 = \rho_2, \qquad \tau z_2 = \rho_3.$$

Le nombre de solutions (ρ_1, ρ_2, ρ_3) de la matrice (II) sera égal au nombre de droites de la congruence s'appuyant sur les droites

$$y_1 = y_2 = 0, \qquad z_3 = z_4 = 0 \ ,$$

sauf $2n$ de ces solutions.

Tous les termes de la matrice (II) sont de degré n en ρ, donc la matrice s'annule pour des valeurs des ρ en nombre

$$\sum_{i=0} (-1)^i \frac{(n-i)^2 (n-i+1)^2}{4} \ .$$

Mais la première colonne de la matrice s'annule n fois pour $\rho_1 = \rho_3 = 0$; il en est de même de la dernière pour $\rho_2 = \rho_3 = 0$.

Ces solutions sont impropres, donc

$$\lambda = \sum_{i=0} (-1)^i \frac{(n-i)^2 (n-i+1)^2}{4} - 2n \ .$$

Enfin

$$\nu = \sum_{i=0} (-1)^i \frac{(n-i)^2 (n-i+1)^2}{4}$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=0} (n-2i) \left[2(n-2i)^2 - (n-2i) + 1 \right] - 2n \ .$$

Lucien Godeaux (Liège).