SUR LES VINGT-SEPT DROITES DE LA SURFACE CUBIQUE,

par M. Godeaux, à Liège.

Les lignes suivantes sont consacrées à une exposition élémentaire des premières propriétés des vingt-sept droites de la surface cubique.

1. Lemme. *Si une droite a quatre points communs avec une surface cubique, elle appartient toute entière à cette surface.*

2. Théorème I. *Une surface cubique générale contient vingt-sept droites.*

Considérons quatre sections planes d'une surface cubique générale et dénotons-les par C_1, C_2, C_3, C_4 ; nous supposons que les plans de ces sections forment un tétraèdre proprement dit. Les droites qui s'appuient en des points distincts sur les quatre courbes C_1, C_2, C_3. C_4 sont en nombre fini et appartiennent entièrement à la surface cubique ; recherchons quel est le nombre de ces droites.

Considérons en premier lieu les droites qui s'appuient en des points distincts sur les trois courbes C_1, C_2, C_3, elles sont en nombre simplement infini et forment une surface réglée R. Pour trouver l'ordre de cette réglée, nous chercherons quels sont les points de la surface R situés dans le plan de C_1. Il nous faut donc connaître la multiplicité de la courbe C_1 pour la surface R. Projetons les courbes C_2, C_3 d'un point quelconque M de C_1, nous obtenons deux cônes cubiques ayant neuf droites en commun. Trois de ces droites passent par les points communs aux courbes C_2, C_3, et n'appartiennent donc pas à R, puisqu'elles ne s'appuient pas en des points distincts sur les courbes C_1, C_2, C_3. Ainsi, par un point de C_1 passent six droites de R ; par conséquent, la courbe C_1 est multiple d'ordre six pour R. Les courbes C_2, C_3 rencontrent chacune le plan de C_1 en trois points, respectivement M_1, M_2, M_3 ; M'_1, M'_2, M'_3. Une droite joignant les points M_1, M'_1, par exemple rencontre C_2 en M_1, C_3 en M'_1 et C_1 en un point distinct de M_1, M'_1 ; par conséquent, elle appartient à R. Nous voyons donc que le plan de C_1 contient une cubique sextuple et neuf droites de R, donc cette surface est d'ordre vingt-sept.

Les droites de R qui passent par les points d'intersection de C_4 avec cette surface appartiennent à la surface cubique, sauf si ces points appartiennent en même temps à l'une des courbes C_1, C_2, C_3. Or, la courbe C_4 rencontre chacune de ces courbes en trois points et chacun de ces points absorbe six intersections. Le nombre total de points d'intersection de K et de C_4 étant 3×27, le nombre de droites de la surface cubique est égal à $3 \times 27 - 3 \times 3 \times 6 = 27$. Le théorème est ainsi démontré.

3. Théorème II. *Il y a dix droites de la surface cubique générale qui s'appuient sur une droite quelconque de cette surface.*

On considérera trois sections planes C_1, C_2, C_3 et une droite d d'une surface cubique générale. La réglée engendrée par les droites s'appuyant en des points distincts sur C_1, C_2 et d est d'ordre neuf et passe deux fois par C_1 et C_2 et cinq fois par d. Le nombre de points d'intersection de cette surface avec C_3, en dehors des lignes C_1, C_2 et d, est égal à $3 \times 9 - 2 \times 2 \times 3 - 5 = 10$. On en déduit le théorème.

4. Théorème III. *Il y a cinq droites de la surface cubique générale qui s'appuient sur deux droites de cette surface ne se rencontrant pas.*

On considère deux sections planes C_1, C_2 et deux droites d_1, d_2 d'une surface cubique générale. Si d_2 ne rencontre pas d_1, la surface engendrée par les droites s'appuyant en des points distincts sur C_1, C_2, d_1 rencontre d_2 en $9 - 2 \times 2 = 5$ points distincts de ceux de C_1, C_2, d'où le théorème.

5. Théorème IV. *Sur trois droites ne se rencontrant pas deux à deux d'une surface cubique générale s'appuient trois droites de la surface.*

Les droites s'appuyant sur trois droites ne se rencontrant pas deux à deux d'une surface cubique générale forment une quadrique qui rencontre une section plane quelconque de la surface cubique en trois points non situés sur l'une ou l'autre des trois droites données, d'où le théorème.

Liége, 22 décembre 1909.

(Extrait de *Mathesis*, 1911, 4e série, t. I, pp 33-34).