Estratto dai « Rendiconti » del R. Ist. Lomb. di sc. e lett., Serie II, Vol. XLIII, 1910.

SUR

UNE CORRESPONDANCE CRÉMONIENNE ENTRE DEUX ESPACES À n DIMENSIONS.

Note

de Lucien Godeaux

La correspondance birationnelle entre deux espaces à n dimensions étudiée il y a quelques années par M. Veneroni (*) dans ces *Rendiconti* donne, pour $n=3$, un cas particulier d'une correspondance rencontrée par l'illustre Cremona (**), transformation à laquelle j'ai été conduit récemment par l'étude des congruences de cubiques gauches (***). Je me propose de rechercher l'analogue de la transformation de Cremona pour les espaces supérieurs, je retrouverai alors la transformation de M. Veneroni comme cas particulier.

1. — Avant de définir la transformation, je commencerai par étudier une variété à $n-2$ dimensions immergée dans un espace linéaire à n dimensions. Cette variété est représentée par l'évanouissement de la matrice

$$\| a_{ik} \| = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n;\, k=0,\ldots,n), \tag{1}$$

les eléments a_{ik} étant des formes linéaires des coordonnés $x_0, x_1, \ldots x_n$ d'un espace linéaire à n dimensions. On vérifie aisémente que la

(*) *Sopra una trasformazione birazionale fra due S_n*. Rendiconti del r. Istituto Lombardo, 1901 (2), XXXIV, pp. 640-644.

(**) *Sulle trasformazioni razionali nello spazio*. Rendiconto del r. Istituto Lombardo, 1871 (2), IV, pp. 269-279 e 315-324.

(***) *Nouveaux types de congruences de cubiques gauches*. Nouvelles Annales de Mathématiques, 1909 (4), IX.

matrice (1) est annullée par les points d'une variété M d'ordre $\frac{1}{2}n(n+1)$.

La variété M est située sur les hypersurfaces d'ordre n d'un système linéaire n fois infini. Une des ces hypersurfaces sera représentée par l'évanouissement du déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda_k \\ a_{ik} \end{vmatrix} = 0, \qquad (i=1,2,\ldots,n;k=0,1,\ldots,n)$$

les λ étant des constantes.

r de ces hypersurfaces n'appartenant pas à un même système linéaire à $r-2$ dimensions, ont en commun, outre la variété M, une variété V_{n-r} à $n-r$ dimensions. Cette variété sera représentée par l'évanouissement de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_{1k} \\ \cdots \\ \lambda_{jk} \\ \cdots \\ \lambda_{rk} \\ a_{ik} \end{matrix} \right\| = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n;k=0,1,\ldots,n). \tag{3}$$

Pour évaluer l'ordre de cette variété V_{n-r}, raisonnons sur une matrice (3) de forme particulière. Supposons $\lambda_{10}=\lambda_{21}=\ldots=\lambda_{r,r-1}=1$ et tous les autres λ nuls. La matrice (3) s'écrira alors

$$\| a_{ik} \| = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,n;\ k=r,r+1,\ldots,n). \tag{4}$$

D'après un théorème de M Segre (*), la V_{n-r} représentée par les équations (4) est d'ordre $\binom{n}{n-r}$.

La variété M a en commun avec une variété V_{n-r} représentée par (3) une variété à $n-r-1$ dimensions, M_{n-r-1}. Pour rechercher l'ordre de cette variété, remarquons que cette variété M_{n-r-1} jointe à une variété M_{n-r-1} forme l'intersection complète d'une V_{n-r}

(*) *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 2° sem. 1900, (5), IX, pp. 253-260.

et d'une variété telle que (2) ne passant pas par la V_{n-r} choisie. On en conclut pour l'ordre de M_{n-r-1} la valeur

$$r\binom{n}{n-r-1}\frac{n+1}{n-r}.$$

La variété M est située sur les hypersurfaces d'ordre n d'un système linéaire ∞^n. *r de ces hypersurfaces se rencontrent généralement, outre M, suivant une variété à* $n-r$ *dimensions d'ordre* $\binom{n}{n-r}$ *ayant en commun avec M une variété à* $n-r-1$ *dimensions d'ordre* $r\binom{n}{n-r-1}\frac{n+1}{n-r}$.

2. — Soient $\sum_1$, $\sum_2$ deux espaces linéaires à n dimensions superposés ou non. Supposons que ces deux espaces soient n fois réciproques et que ces deux réciprocités ne soient pas deux à deux surperposées, c'est-à-dire que à tout point de $\sum_1$ (ou de $\sum_2$) correspondent n hyperplans non superposés deux à deux dans $\sum_2$ (ou $\sum_1$).

La transformation dont nous nous occupons fait correspondre à un point P_1 de $\sum_1$ le point P_2 situé sur les n hyperplans correspondants à P_1 dans $\sum_2$. On voit aisément que cette transformation est birationnelle en renversant la définition.

Une autre définition de la transformation s'obtendra comme suit: soient

$$a\,i_x\,a'\,i_y = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les n réciprocités établies entre $\sum_1$ et $\sum_2$; $x_0, \ldots, x_n$; $y_0, \ldots y_n$, étant respectivement les coordonnées de ces espaces. Les points de $\sum_1$ correspondants aux points d'un hyperplan

$$\alpha_y = 0$$

de $\sum_2$ sont situés sur la variété à $n-1$ dimensions représentée par l'équation

$$\begin{vmatrix} \alpha_k \\ \vdots \\ a\,i_x\,a'\,i_k \end{vmatrix} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n).$$

Aux ∞^n hyperplans de $\sum_2$ correspondent ainsi les ∞^n hypersurfaces passant par la variété à $n-2$ dimensions

$$\| a\,i_x\,a'\,i_k \| = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, n). \quad (5)$$

Cette variété n'est autre que celle étudiée au paragraphe précédent.

La transformation s'obtient en rapportant projectivement les hyperplans d'un espace à n dimensions et les hypersurfaces d'ordre n passant par une variété telle que M.

3. — À un espace linéaire à $n-r$ dimensions de $\sum_1$ (ou $\sum_2$) correspondra dans $\sum_2$ (ou $\sum_1$) une variété d'ordre $\binom{n}{n-r}$ commune à $n-r$ hypersurfaces indépendantes passant par la variété (5) (ou par la variété (6))

$$\| a\, i_k\, a'\, i_y \| = 0. \tag{6}$$

A un point de la variété (5) correspondent ∞^1 points de $\sum_2$. Les points de $\sum_2$ qui correspondent à un point quelconque de (5) appartiennent à une hypersurface Φ_2 dont nous allons évaluer l'ordre. Celui-ci est évidemment égal au nombre de points communs à la courbe de $\sum_1$ transformée d'un droite de $\sum_2$ et à la variété (5), donc l'ordre de Φ_2 est n^2-1.

Les points de $\sum_1$ (ou de $\sum_2$) correspondants aux points de la variété (6) (*ou* (5)) *appartiennent à une hypersurface Φ_1 (ou Φ_2) d'ordre n^2-1.*

4. — Supposons que les points de $\sum_2$ correspondants à un point de la varieté (5) appartiennent à une courbe d'ordre ν. Alors les hypersurfaces d'ordre n passant par la variété (5) doivent avoir chaque point de celle-ci multiple d'indice ν, par conséquent $\nu=1$.

Les droites qui s'appuient en n points sur la variété M engendrent une hypersurface d'ordre n^2-1. De plus, il n'y a aucune droite ayant $n+1$ points communs avec M.

Liège, 3 novembre 1909.

Milano, 1910. — Tip-Lit. Rebeschini di Turati e C.