ÉTUDES

DE

GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE

PAR

Lucien GODEAUX

ÉTUDIANT EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES
A L'UNIVERSITÉ DE LIÉGE

Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liége*,
3e série, t. VIII, 1909.

Bruxelles. — HAYEZ, imp. de l'Acad. royale.

ÉTUDES

DE

GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE

I. — Sur la génération d'une surface algébrique particulière.

Dans ce travail, nous exposons un procédé de génération d'une surface algébrique particulière dont certains cas spéciaux conduisent à des résultats intéressants que nous espérons pouvoir publier plus tard.

1. Soient dans l'espace deux surfaces S_1 d'ordre m_1, S_2 d'ordre m_2 et deux congruences G_1 d'ordre n_1 et de classe n'_1, G_2 d'ordre n_2 et de classe n'_2.

Par un point M de l'espace, menons les droites g_1, g_2 appartenant aux congruences G_1, G_2. Au point M, nous faisons correspondre les $m_1 m_2 n_1 n_2$ droites en joignant les points (g_1, S_1) aux points (g_2, S_2).

Aux ∞^3 points de l'espace correspondent les droites d'un complexe Φ dont nous allons rechercher l'ordre.

Soit (P, π) un faisceau-plan de sommet P et de plan π. Entre certains rayons p_1 de ce faisceau et d'autres rayons p_2, nous établissons la correspondance suivante : un rayon de G_1 mené par un point (p_1, S_1) rencontre un rayon de G_2 mené par un point (p_2, S_2). Une coïncidence des rayons p_1, p_2 est évidemment une droite du complexe.

Menons un rayon p_1. Par les m_1 points (p_1, S_1) menons les m_1n_1 rayons de la congruence G_1. Les droites de la congruence G_2 qui s'appuient sur un de ces rayons et sur la courbe (S_2, π) sont au nombre de

$$2m_1m_2n_1(n_2 + n'_2).$$

Par les points de rencontre de ces droites avec la surface S_2, menons les rayons p_2. Inversement, à un rayon p_2 correspondent

$$2m_1m_2n_2(n_1 + n'_1)$$

rayons p_1. D'après le principe de Chasles, il y a

$$2m_1m_2(2n_1n_2 + n_1n'_2 + n'_1n_2)$$

coïncidences. Remarquons qu'une droite appartenant au faisceau (P, π) et qui s'appuie sur la courbe (S_1S_2) absorbe $n_1 + n_2$ coïncidences. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

Si un triangle se déforme de telle façon que deux de ses côtés appartiennent à des congruences (n_1, n'_1), (n_2, n'_2), *tandis que les sommets opposés décrivent des surfaces respectivement d'ordre* m_1, m_2, *le troisième côté décrira un complexe d'ordre*

$$m_1m_2(\overset{2}{4}n_1n_2 + 2n_1n'_2 + 2n'_1n_2 - n_1 - n_2).$$

Nous avons déjà rencontré quelques cas particuliers de ce théorème (*).

2. Soit Ψ un complexe d'ordre p. Les points correspondants aux droites communes aux complexes Φ et Ψ décrivent une surface dont nous allons rechercher l'ordre.

Soient (x_1) et (x_2) deux ponctuelles superposées. Par un point x_1 de la première, menons les n_1 droites g_1 de G_1. Par les $n_1m'_1$

(*) *Notes de Géométrie synthétique.* (Mémoires de la Société des sciences, lettres et arts de Mons, 1907, 3e sér., t. IX.)

points (g_1, S_1) menons les droites appartenant au complexe Ψ, elles forment $n_1 m_1$ cônes d'ordre p. Ces cônes marquent sur la surface S_2, $m_1 n_1$ courbes d'ordre $m_2 p$. Les droites de G_2 qui s'appuient sur ces courbes engendrent $m_1 n_1$ surfaces d'ordre

$$m_2 p(n_2 + n_2').$$

Ces surfaces marquent sur la ponctuelle (x_2) un nombre

$$m_1 m_2 n_1 p(n_2 + n_2')$$

de points. Inversement, à un point x_2 correspondent

$$m_1 m_2 n_2 p(n_1 + n_1')$$

points x_1. D'après le principe de Chasles, il y a

$$m_1 m_2 p(2n_1 n_2 + n_1 n_2' + n_1' n_2)$$

coïncidences. Les droites qui correspondent à une de ces coïncidences appartiennent au complexe Φ d'après la définition même de ce complexe, donc les coïncidences sont des points de la surface cherchée et on a le théorème suivant :

Si un triangle se déforme de telle manière que deux de ses côtés décrivent des congruences (n_1, n_1'), (n_2, n_2'), *les sommets opposés décrivant des surfaces respectivement d'ordre* m_1, m_2, *tandis que le troisième côté décrit un complexe* (p, p), *le troisième sommet décrira une surface* S *d'ordre*

$$m_1 m_2 p(2n_1 n_2 + n_1 n_2' + n_1' n_2).$$

Nous avons déjà rencontré quelques cas particuliers de ce théorème (*).

3. Soit P un point par lequel passent ∞^1 droites de G_1, ces droites étant les génératrices d'un cône d'ordre γ_1.

Par le point P, menons les n_2 droites g_2 de la congruence G_2

(*) *Notes de Géométrie,* loc. cit.
Sur une surface du quatrième ordre. (NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, 1907, 4e sér., t. VII.)

et par les points (g_2, S_2) menons les droites appartenant au complexe Ψ. Les cônes engendrés rencontrent S_1 suivant $m_2 n_2$ courbes d'ordre pm_1. Ces courbes déterminent $m_1 m_2 n_2 p\gamma_1$ génératrices du cône de sommet P par leur intersection avec ce cône, donc :

Le point P *est multiple d'ordre* $m_1 m_2 n_2 p\gamma_1$ *sur la surface* S.

4. Soit Q un point de l'intersection des surfaces S_1, S_2.

Ce point Q peut être considéré comme le sommet de $n_1 n_2 p$ triangles dégénérés en un point et dont les côtés appartiennent respectivement à G_1, G_2, Ψ; donc :

La ligne d'intersection des surfaces S_1, S_2 *est multiple d'ordre* $n_1 n_2 p$ *sur la surface* S.

5. Soit l une droite du complexe Φ qui est multiple d'ordre λ pour le complexe Ψ (*). Il lui correspond au moins un point de la surface S; désignons par L ce point.

Soient (x_1), (x_2) deux ponctuelles de même support x, cette droite passant par L. Nous avons vu qu'à un point x_1 correspondent des points x_2 en nombre $m_1 m_2 n_1 p(n_2 + n'_2)$, mais si le point x_1 coïncide avec le point L, λ points x_2 viennent aussi coïncider avec L ; donc :

Le point L *est multiple d'ordre* λ *sur la surface* S.

6. Pour terminer, nous signalerons le cas particulier suivant :

Si un triangle se déforme de telle manière qu'un de ses côtés passe par un point donné, un second côté décrivant une congruence linéaire, tandis que les sommets opposés décrivent des plans donnés et que le troisième côté appartient à un complexe linéaire, le troisième sommet décrira une surface cubique.

(*) Nous entendons par là que la droite l est multiple d'ordre λ pour tout cône du complexe dont le sommet est sur l, ou pour toute courbe du complexe dont le plan passe par l.

II. — Sur quelques surfaces algébriques engendrées par le sommet d'un angle variable.

Si les côtés d'un angle de grandeur variable décrivent des congruences données et rencontrent un plan donné en des points d'une même courbe d'un faisceau donné dans ce plan, le sommet de l'angle pourra occuper ∞^2 positions et par conséquent engendrera une surface. Dans cette note, nous nous proposons d'étudier quelques surfaces obtenues par ce procédé.

1. Soient G_{1_m}, G_{1_n} deux congruences linéaires de droites respectivement de classe m, n; α un plan fixe et Φ un faisceau ponctuel de courbes d'ordre μ dans ce plan.

Considérons un angle de sommet P dont les côtés appartiennent respectivement aux congruences G_{1_m}, G_{1_n}, et rencontrent le plan α en des couples de points d'une même courbe du faisceau Φ. Recherchons l'ordre du lieu de P au moyen du principe de Chasles.

Soit x une droite quelconque support de deux ponctuelles (X_1), (X_2). Par un point de (X_1) menons la droite appartenant à la congruence G_{1_m} et par le point de rencontre de cette droite avec le plan α la courbe du faisceau Φ. Les droites de G_{1_n} qui s'appuient sur cette courbe engendrent une surface d'ordre $\mu(1+n)$ qui marque, sur la ponctuelle (X_2), $\mu(1+n)$ points. Inversement, à un point X_2 correspondent $\mu(1+m)$ points X_1. Les ponctuelles (X_1), (X_2) sont donc liées par une correspondance $[\mu(1+m), \mu(1+n)]$; donc, d'après le principe de Chasles, il y a $\mu(m+n+2)$ coïncidences. Si nous remarquons que l'une de celles-ci tombe dans le plan α, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Si un angle varie de telle sorte que ses côtés décrivent deux congruences linéaires respectivement de classes m, n, *et rencon-*

trent un plan fixe en des points d'une même courbe d'ordre μ *d'un faisceau ponctuel, son sommet décrira une surface* M *d'ordre* $\mu(m+n+2)-1$.

2. Une droite commune aux congruences G_{1_m}, G_{1_n} appartient évidemment à la surface M, car alors l'angle est nul et les points de rencontre de ses côtés avec le plan α sont confondus.

Par un des points de base du faisceau Φ menons la droite appartenant à la congruence G_{1_m}. Par un point de cette droite menons le rayon appartenant à G_{1_n}; ce rayon détermine une courbe du faisceau Φ qui passe nécessairement par le point de base considéré ; donc les droites des congruences G_{1_m}, G_{1_n} passant par les points de base du faisceau Φ appartiennent à la surface M. En résumé :

La surface M *contient* $1+mn+2\mu^2$ *droites simples.*

3. Soit x une droite de la congruence G_{1_m}. Cette droite détermine une courbe du faisceau Φ passant par le point (x, α). Les droites de la congruence G_{1_n} qui s'appuient sur cette courbe engendrent une surface qui rencontre x en $\mu(1+n)-1$ points non situés sur α. On en conclut que la surface M est rencontrée par une droite de G_{1_m} en $\mu(1+n)-1$ points non singuliers pour cette congruence. Nous pouvons donc énoncer les théorèmes suivants :

1° $m=0$. *Si l'une des congruences est une gerbe de rayons, le centre de la gerbe est un point multiple d'ordre* μ *sur la surface* M ;

2° $m=1$. *Si l'une des congruences est bilinéaire, ses directrices sont multiples d'ordre* μ *pour la surface* M ;

3° $m=3$. *Si l'une des congruences est formée par les bisécantes d'une cubique gauche, cette courbe est multiple d'ordre* 2μ *sur la surface* M.

4. Supposons que la congruence G_{1_m} est le lieu des droites qui s'appuient sur une droite d et sur une courbe d'ordre m rencontrant $m-1$ fois d.

Soit A un point de d et x une droite passant par ce point. En faisant le même raisonnement qu'au numéro 1, nous pouvons établir entre deux ponctuelles (X_1), (X_2) de support commun x une correspondance $[\mu, \mu(1 + n)]$, à condition d'exclure le point A. Le principe de Chasles nous permet maintenant de conclure que la droite x rencontre encore la surface M en $\mu(n + 2)$ points et que par conséquent le point A est multiple d'ordre $\mu m - 1$. Si nous retournons au numéro 3, nous voyons que la courbe directrice d'ordre m est multiple d'ordre 2μ.

Si l'une des congruences possède deux lignes directrices, savoir une droite et une courbe, la droite est multiple d'ordre $\mu m - 1$ *et la courbe d'ordre* 2μ *sur la surface* M.

La surface générale que nous venons d'étudier contient comme cas particulier une surface cubique à deux points doubles que nous avons étudiée précédemment (*).

(*) *Notes de Géométrie.* (MÉMOIRES DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DES SCIENCES DE LIÉGE, 1908, 3e sér., t. VIII.)

III. — Le théorème de Grassmann sur une surface algébrique.

1. Soient F une surface algébrique dépourvue de singularités, et sur cette surface un réseau $|C|$ de degré n, formé par des courbes C de genre p et dépourvu de points de base et de courbes fondamentales.

Choisissons sur la surface F trois groupes de n points situés à la fois sur ∞^1 courbes C, ne se trouvant pas sur une même courbe C, et désignons-les par P_1, P_2, P_3. Soient de plus trois autres courbes C_1, C_2, C_3 choisies d'une manière quelconque dans $|C|$, c'est-à-dire n'appartenant pas toutes trois à un même faisceau.

Un point quelconque X de F détermine une courbe C'_i de $|C|$ passant par le groupe de n points P_i. Cette courbe C'_i marque sur la courbe C_i un groupe de n points P'_i situé sur ∞^1 courbes C. Donnant à i les valeurs 1, 2, 3, nous obtenons trois groupes de points P'_1, P'_2, P'_3; si ces trois groupes sont sur une même courbe C, le point X décrit une courbe G.

Dans le cas où F est un plan et où les courbes C sont les droites de ce plan, on retrouve un théorème bien connu de Grassmann.

2. Soit K une courbe tracée sur la surface F et rencontrant une courbe C en k points. Recherchons le nombre de points communs aux courbes G et K.

Par un point X_1 de K, menons une courbe C passant par le groupe P_1. Cette courbe détermine sur C_1 un groupe de points P'_1. Entre des points X_2, X_3 de K, établissons une correspondance telle que le groupe de points P'_2 marqué sur C_2 par la courbe C passant par X_2 et P_2, et le groupe P'_3 obtenu sur C_3 au moyen de X_3 et P_3 de la même manière, déterminent une C contenant le groupe P'_1. Comme on le voit facilement, les points X_2, X_3 sont liés par une correspondance (k, k) et la valeur (*) de cette correspondance est nulle, car quand X_2 varie, les k points X_3 qui lui correspondent forment une série linéaire. D'après le principe de Cayley-Brill, il y a donc $2k$ coïncidences.

Par un raisonnement analogue, on voit que les séries de points X_1, X_2, X_3 présentent $3k$ coïncidences.

Les courbes G *et* K *ont* 3k *points communs.*

En particulier, si la courbe K est une courbe C quelconque, on voit que les courbes C et G ont $3n$ points communs.

Une courbe C rencontre la jacobienne J du réseau $|C|$ en $2(p+n-1)$ points, donc les courbes J et G ont $6(p+n-1)$ points communs.

En se rapportant à la définition du caractère d'immersion (**), on peut écrire :

Le caractère d'immersion θ *de la courbe* G *est*

$$\theta = 3(2p + n - 2).$$

La courbe G passe évidemment par les points des groupes P_1, P_2, P_3 et par les points communs aux couples de courbes C_1, C_2 ; C_2, C_3 ; C_3, C_1.

3. Représentons projectivement le réseau $|C|$ par les droites d'un plan F^*, la surface F sera représentée par le plan n^{uple} F^* et la courbe G aura pour correspondante dans ce plan une cubique elliptique G^*. La courbe de diramation du plan F^* est d'ordre $2(n+p-1)$; donc sur G^* se trouvent $6(n+p-1)$ points de diramation. Les courbes G, G^* se trouvant liées par une corres-

---

(*) Valenza, Werthigkeit.

(**) F. Severi, *Il genere aritmetico ed il genere lineare*... (Atti di Torino, 1902, t. XXXVII, § 1.)

pondance (n, 1), on a, d'après une formule classique de M. Zeuthen (*),

$$\rho = 3n + 3p - 2,$$

ρ étant le genre de la courbe G.

Le genre d'une courbe de Grassmann d'un réseau de degré n *et de genre* p *est*

$$\rho = 3\mathrm{n} + 3\mathrm{p} - 2,$$

le réseau étant privé de base et de courbes fondamentales.

Liége, 25 novembre 1908.

(*) SEGRE, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito.* (ANNALI DI MATEMATICA, 1894, 2e sér., t. XXII, § 10.)