Sur quelques congruences linéaires de coniques.

M. Stuyvaert[1]) a imaginé une méthode analytique pour étudier les congruences linéaires de cubiques gauches; dans ce travail, nous appliquerons la même méthode à l'étude de quelques congruences de coniques. Les congruences que nous rencontrerons ici ont été signalées par M. Montesano dans deux notes.[2])

1. Si, suivant la notation classique de Clebsch et Aronhold, nous désignons par a_x une forme linéaire quaternaire, l'évanouissement de l'une des matrices:

$$\text{(A)} \quad \begin{Vmatrix} a_x^2 & a_x' & A \\ b_x^2 & b_x' & B \end{Vmatrix}, \qquad \text{(B)} \quad \begin{Vmatrix} a_x^2 & a_x' & a_x'' \\ b_x & B' & B'' \end{Vmatrix}$$

représente une conique de l'espace.

Examinons la représentation (A). Le plan de la conique est représenté par l'équation

$$A b_x' - B a_x' = 0.$$

La conique se trouve sur les deux surfaces

$$A b_x^2 - B a_x^2 = 0, \qquad a_x^2 b_x' - b_x^2 a_x' = 0.$$

Dans la seconde représentation, le plan de la conique a pour équation

$$B' a_x'' - B'' a_x' = 0,$$

et la courbe se trouve sur les surfaces quadratiques

$$B' a_x^2 - b_x a_x' = 0, \qquad B'' a_x^2 - b_x a_x'' = 0.$$

Si les éléments de ces matrices sont fonctions de trois paramètres homogènes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, on aura ∞^2 coniques, c'est-à-dire une congruence de coniques. Nous allons examiner plus spécialement le cas où les α entrent au premier degré dans une ligne ou dans deux colonnes.

Nous aurons donc à examiner les types suivants:

$$\text{(I)} \quad \begin{Vmatrix} \alpha_1 a_x^2 + \alpha_2 b_x^2 + \alpha_3 c_x^2 & \alpha_1 a_x' + \alpha_2 b_x' + \alpha_3 c_x' & \alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C \\ d_x^2 & d_x' & D \end{Vmatrix} = 0,$$

$$\text{(II)} \quad \begin{Vmatrix} \alpha_1 a_x^2 + \alpha_2 b_x^2 + \alpha_3 c_x^2 & \alpha_1 a_x' + \alpha_2 b_x' + \alpha_3 c_x' & A \\ \alpha_1 d_x^2 + \alpha_2 f_x^2 + \alpha_3 g_x^2 & \alpha_1 d_x' + \alpha_2 f_x' + \alpha_3 g_x' & B \end{Vmatrix} = 0,$$

$$\text{(III)} \quad \begin{Vmatrix} \alpha_1 a_x^2 + \alpha_2 b_x^2 + \alpha_3 c_x^2 & a_x' & \alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C \\ \alpha_1 d_x^2 + \alpha_2 f_x^2 + \alpha_3 g_x^2 & d_x' & \alpha_1 D + \alpha_2 F + \alpha_3 G \end{Vmatrix} = 0,$$

$$\text{(IV)} \quad \begin{Vmatrix} a_x^2 & \alpha_1 a_x' + \alpha_2 b_x' + \alpha_3 c_x' & \alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 C \\ d_x^2 & \alpha_1 d_x' + \alpha_2 f_x' + \alpha_3 g_x' & \alpha_1 D + \alpha_2 F + \alpha_3 G \end{Vmatrix} = 0,$$

$$\text{(V)} \quad \begin{Vmatrix} \alpha_1 a_x^2 + \alpha_2 b_x^2 + \alpha_3 c_x^2 & \alpha_1 a_x' + \alpha_2 b_x' + \alpha_3 c_x' & \alpha_1 a_x'' + \alpha_2 b_x'' + \alpha_3 c_x'' \\ d_x & D & D' \end{Vmatrix} = 0,$$

1) *Cinq Etudes de Géométrie Analytique (Prix François Deruyts).* Gand, Librairie Van Goethem, 1908.

2) *Su i varii tipi di congruenze lineari di coniche dello spazio.* Rendiconti di Napoli, 1895.

$$\text{(VI)} \quad \left\| \begin{matrix} \alpha_1 a_x^2 + \alpha_2 b_x^2 + \alpha_3 c_x^2 & \alpha_1 a_x' + \alpha_2 b_x' + \alpha_3 c_x' & a_x'' \\ \alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x + \alpha_3 g_x & \alpha_1 D + \alpha_2 F + \alpha_3 G & D' \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$\text{(VII)} \quad \left\| \begin{matrix} a_x^2 & \alpha_1 a_x' + \alpha_2 b_x' + \alpha_3 c_x' & \alpha_1 a_x'' + \alpha_2 b_x'' + \alpha_3 c_x'' \\ d_x & \alpha_1 D + \alpha_2 F + \alpha_3 G & \alpha_1 D' + \alpha_2 F' + \alpha_3 G' \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$\text{(VIII)} \quad \left\| \begin{matrix} a_x^2 & a_x' & a_x'' \\ \alpha_1 d_x + \alpha_2 f_x + \alpha_3 g_x & \alpha_1 D + \alpha_2 F + \alpha_3 G & \alpha_1 D' + \alpha_2 F' + \alpha_3 G' \end{matrix} \right\| = 0.$$

2. *Congruence* (I). — Les plans des coniques de la congruence (I) passent tous par le point A commun aux trois plans:

$$Da_x' - Ad_x' = 0, \quad Db_x' - Bd_x' = 0, \quad Dc_x' - Cd_x' = 0.$$

Donner un plan passant par le point A revient à donner un système de valeurs des α, donc *la congruence I est de la première classe.*

Le lieu des points singuliers de la congruence est le lieu des points qui annulent la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 & d_x^2 \\ a_x' & b_x' & c_x' & d_x' \\ A & B & C & D \end{matrix} \right\|.$$

Cette matrice représente une courbe gauche d'ordre sept et de genre cinq. Cette courbe passe visiblement par le point A.

La congruence I n'est autre que la congruence étudiée en premier lieu par voie synthétique par M. Montesano[1]), congruence que l'on rencontre dans la théorie des complexes bilinéaires de coniques.[2])

3. *Congruence* (II). — Les plans des coniques passent aussi par un point fixe commun aux trois plans

$$Ad_x' - Ba_x' = 0, \quad Af_x' - Bb_x' = 0, \quad Ag_{x1}' - Bc_x' = 0,$$

et la congruence est de première classe.

Le lieu des points singuliers est une courbe d'ordre sept et de genre cinq passant par le sommet de la gerbe; cette courbe est représentée par l'évanouissement de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_x' B - Ad_x' & b_x' B - Af_x' & c_x' B - Ag_x' \\ a_x^2 B - Ad_x^2 & b_x^2 B - Af_x^2 & c_x^2 B - Ag_x^2 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Finalement, on voit que les congruences (I) et (II) sont identiques.

4. *Congruence* (III). — Les plans des coniques de cette congruence ont une équation de la forme

$$\alpha_1 (Da_x' - Ad_x') + \alpha_2 (Fa_x' - Bd_x') + \alpha_3 (Ga_x' - Cd_x') = 0.$$

---

1) *Su di un sistema lineare di coniche nello spazio.* Atti di Torino. 1892, tome XXVII.

2) Humbert, *Sur un complexe remarquable de coniques et sur la surface du troisième ordre.* Journal de l'Ecole Polytechnique, 1894, LXIV^e cahier.

Tous ces plans passent donc par une droite fixe a commune aux deux plans

$$a'_x = 0, \quad d'_x = 0.$$

On en conclut que *la congruence est de classe nulle.*

Chaque plan du faisceau d'axe a contient ∞^1 coniques de la congruence, et puisque la congruence est linéaire, ces ∞^1 coniques forment un faisceau ponctuel.

Les points singuliers de la congruence annulent la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_x^2 d'_x - a'_x d_x^2 & b_x^2 d'_x - a_x^2 f_x^2 & c_x^2 d'_x - a'_x g_x^2 \\ A\, d'_x - a'_x D & B\, d'_x - a'_x F & C d'_x - a'_x G \end{matrix} \right\| = 0.$$

Cette matrice représente trois fois la droite a et une courbe du dixième ordre qui est nécessairement sextisécante de la droite a, la congruence étant linéaire.

La congruence (III) *est engendrée par les coniques s'appuyant en quatre points sur une courbe du dixième ordre et dont les plans passent par une droite six fois sécante de la courbe.*

5. *Congruence* (IV). — Les coniques de cette congruence sont situées sur des quadriques dont l'équation est de la forme

$$\alpha_1 (A d_x^2 - D a_x^2) + \alpha_2 (B d_x^2 - F a_x^2) + \alpha_3 (C d_x^2 - G a_x^2) = 0,$$

c'est-à-dire sur les quadriques d'un faisceau défini par

$$a_x^2 = 0, \quad d_x^2 = 0.$$

La courbe du quatrième ordre commune à ces deux quadriques est quadrisingulière.

L'ensemble des points singuliers de la congruence est donné par l'évanouissement de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a'_x d_x^2 - d'_x a_x^2 & b'_x d_x^2 - f'_x a_x^2 & c'_x d_x^2 - g'_x a_x^2 \\ A\, d_x^2 - D\, a_x^2 & B\, d_x^2 - F a_x^2 & C\, d_x^2 - G\, a_x^2 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Cette matrice représente la quartique rencontrée tantôt comptée trois fois et une courbe du septième ordre. Une quadrique quelconque contenant des coniques de la congruence rencontre cette dernière courbe en quatorze points; comme la congruence est du premier ordre, les deux courbes singulières ont nécessairement douze points communs.

Les plans des coniques de la congruence enveloppent une surface de la deuxième classe, dans chaque plan tangent se trouve une seule conique, car se donner un plan équivaut à se donner un système de valeurs des α; il en résulte que la congruence est de classe deux.

En résumé: *La congruence* (IV) *est de la seconde classe, elle possède une quartique gauche de première espèce quadrisingulière et une courbe gauche du septième ordre bisingulière; ces deux courbes ont douze points communs.*

6. *Congruence* (V). — Les plans des coniques de cette congruence passent par le point commun aux trois plans

$$D a''_x - D' a'_x = 0, \quad D b''_x - D' b'_x = 0, \quad D c''_x - D' c'_x = 0.$$

Le lieu des points singuliers est donné par l'évanouissement de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_x^2 & b_x^2 & c_x^2 & d_x \\ a_x' & b_x' & c_x' & D \\ a_x'' & b_x'' & c_x'' & D' \end{matrix} \right\| = 0.$$

C'est une courbe du septième ordre passant par le sommet de la gerbe des plans rencontrée plus haut.

Finalement, on trouve que la congruence V est identique aux congruences (I) et (II).

7. *Congruence* (VI). — L'équation du plan d'une conique de la congruence est de la forme

$$\alpha_1 (D' a_x' - D a_x'') + \alpha_2 (D' b_x' - F a_x'') + \alpha_3 (D' c_x' - G a_x'') = 0.$$

Les plans des coniques appartiennent donc à une gerbe et *la congruence est de la première classe.*

Le lieu des points singuliers est donné par

$$\left\| \begin{matrix} D' a_x^2 - a_x'' d_x & D' b_x^2 - a_x'' f_x & D' c_x^2 - a_x'' g_x \\ D' a_x' - D a_x'' & D' b_x' - F a_x'' & D' c_x' - G a_x'' \end{matrix} \right\| = 0.$$

Cette matrice s'évanouit pour les points d'une courbe gauche du cinquième ordre et de genre deux. Les coniques de la congruence s'appuient en cinq points sur cette courbe et comme celle-ci passe visiblement par le point commun à tous les plans des coniques, toutes les coniques passent par ce point.

La congruence (VI) *est engendrée par les* ∞^2 *coniques passant par un point fixe et s'appuyant quatre fois sur une quintique gauche de genre deux passant par le point principal.*

8. *Congruence* (VII). — Les plans contenant les coniques de cette congruence enveloppent une quadrique, *donc la congruence est de la seconde classe.*

L'évanouissement de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} a_x' d_x - a_x^2 D & b_x' d_x - a_x^2 F & c_x' d_x - a_x^2 G \\ a_x'' d_x - a_x^2 D' & b_x'' d_x - a_x^2 F' & c_x'' d_x - a_x^2 G' \end{matrix} \right\| = 0$$

représente le lieu des points singuliers; ce lieu se compose d'une courbe du sixième ordre et d'une conique

$$a_x^2 = 0, \quad d_x = 0,$$

sextisécante de la sextique et comptée trois fois.

La congruence (VII) *est engendrée par les* ∞^2 *coniques qui s'appuient quatre fois sur une sextique et deux fois sur une conique s'appuyant six fois sur la première courbe.*[1])

9. *Congruence* (VIII). — Les plans des coniques de la congruence passent par une droite fixe

$$a_x' = 0, \quad a_x'' = 0.$$

---

1) D'autres congruences possédant des coniques bisingulières ont été considérées par M. Pieri: *Sopra alcune congruenze di coniche.* Atti di Torino. 1893. T. XXVIII.

Le lieu des points singuliers est donné par l'évanouissement de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} d_x & f_x & g_x & a_x^2 \\ D & F & G & a'_x \\ D' & F' & G' & a''_x \end{matrix} \right\| = 0.$$

Cette matrice s'annule pour les points d'une conique.

Toutes les coniques de la congruence VIII passent par les points communs aux deux plans

$$a'_x = 0, \quad a''_x = 0$$

et à la quadrique

$$a_x^2 = 0.$$

La congruence (VIII) *est engendrée par les coniques passant par deux points fixes et s'appuyant en deux points sur une conique.*

C'est la congruence de première espèce de M. Pieri[1]).

Liége, 8 Septembre 1908. Lucien Godeaux.

---

3. Sprechsaal.

Vermeintliche Beweise des Fermatschen Satzes.

43. Hans Volkmann, Aachen (Stand unbekannt). 8, mit Nachträgen 12 Seiten. 1909.

Verfasser will zunächst die Unmöglichkeit der Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ beweisen, um hieraus die Unmöglichkeit von $x^n + y^n = z^n$ zu erschließen, *weil jede ganze Zahl ein rationaler Kubus sei.* Daß letzteres falsch ist, hat aber der Verfasser, wie ein nachträglich beigefügtes Fragezeichen anzudeuten scheint, doch schließlich selbst bemerkt. Indes ist auch der auf die Gleichung $x^3 + y^3 = z^3$ bezügliche Nachweis mißglückt. Denn hierbei wird, von allem andern abgesehen, von dem Satz ausgegangen, daß in der Gleichung $\frac{3}{4}h^2 + \frac{1}{4} = c^2$ die Zahlen h und c nicht gleichzeitig rational sein können, außer $h = 1$, $c = 1$. Allein die Theorie der Pellschen Gleichung liefert noch unendlich viele rationale und sogar ganzzahlige Lösungen, z. B. $h = 15$, $c = 13$.

44. Hans Volkmann, Aachen. 8 Seiten.

Die neue Arbeit bedeutet keinen Fortschritt gegen die frühere des gleichen Verfassers. Sie stützt sich u. a. auf den durch allerhand Trugschlüsse bewiesenen Satz (pag. 4): „Für $n > 2$ ist in der Gleichung $(m + 1)^n - m^n = c^2$ bei ganzzahligem m der Wert c irrational". Aber dieser Satz ist falsch. Zum Beispiel ist $8^3 - 7^3 = 13^2$.

45. Hans Dirrigl, Regierungs- und Bauassessor, Speyer a. Rh. (Manuskript, 1909, 33 Seiten.)

Gegen die 26 ersten Seiten wäre nicht allzuviel einzuwenden. Der Hauptfehler knüpft erst an Gleichung 192, Seite 26 an; dort soll der Ausdruck $\frac{(\nu_1 + \nu)^{n-1} - n\nu\nu_1\sigma_4}{\nu_1 + \nu \pm np}$, in dem die beiden Terme des Zählers relativ prim sind,

---

1) loc. cit.