NOTES

DE

GÉOMÉTRIE

PAR

Lucien GODEAUX

ÉTUDIANT EN SCIENCES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES, A LIÉGE.

Extrait des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège*,
3e série, t. VIII, 1908.

Bruxelles. — HAYEZ, imp. de l'Acad. royale.

NOTES DE GÉOMÉTRIE

I. — Une surface cubique à deux points doubles.

1. Soient A_1, A_2 deux points quelconques de l'espace et B_1, B_2, B_3, B_4 les points de base d'un faisceau de coniques dans un plan α ne passant ni par A_1, ni par A_2.

Proposons-nous de rechercher le lieu des points tels que les droites qui les joignent aux points A_1, A_2 rencontrent le plan α en deux points situés sur une même conique du faisceau.

Soient (D_1), (D_2) deux ponctuelles ayant comme support commun une droite d quelconque. Par D_1 et A_1, menons la droite g_1, le point (α, g_1) détermine une conique du faisceau. La surface conique qui projette cette conique du point A_2 marque sur d deux points D_2. Inversement, à un point D_2 correspondent deux points D_1. Entre les ponctuelles (D_1), (D_2) existe donc une correspondance (2, 2). Une coïncidence des points D_1, D_2 est un point du lieu cherché. D'après le principe de Chasles, il y a quatre de ces coïncidences sur d, mais l'une est le point (d, α). Donc :

Si les côtés d'un angle variable passent par des points fixes et rencontrent un plan en deux points d'une même conique d'un faisceau donné, le sommet de l'angle décrit une surface du troisième ordre.

2. Soit g une droite passant par A_1. Les droites passant par A_2 et s'appuyant sur la conique du faisceau déterminée par le point (g, α) et sur la droite g sont au nombre de deux. L'une d'elles passe par le point (g, α) ; ce dernier ne faisant pas généralement partie de la surface cubique, il en résulte qu'une droite passant par A_1 ne rencontre plus cette surface qu'en un point, le point A_1 est donc *double*. Il en est de même du point A_2 et la droite $a \equiv A_1A_2$ appartient à la surface.

3. Recherchons les autres droites de la surface.

La droite $b_{ij} \equiv A_iB_j (i = 1, 2 ; j = 1, 2, 3, 4)$ appartient évidemment à la surface. On trouve ainsi huit droites.

Désignons par (m_1, m_2), (n_1, n_2), (p_1, p_2) les couples de côtés opposés (B_1B_2, B_3B_4), (B_1B_3, B_2B_4), (B_1B_4, B_2B_3) du quadrangle complet $B_1B_2B_3B_4$ et soient M, N, P les points de concours de deux côtés opposés. Les plans A_1m_1, A_2m_2 ont en commun une droite m'_1 passant par M, et comme elle rencontre les quatre droites b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} de la surface, elle y est contenue tout entière.

Nous obtenons ainsi six droites, à savoir :

$$(A_1m_1,\ A_2m_2) \equiv m'_1, \qquad (A_1m_2,\ A_2m_1) \equiv m'_2,$$
$$(A_1n_1,\ A_2n_2) \equiv n'_1, \qquad (A_1n_2,\ A_2n_1) \equiv n'_2,$$
$$(A_1p_1,\ A_2p_2) \equiv p'_1, \qquad (A_1p_2,\ A_2p_1) \equiv p'_2.$$

Les droites m'_1, m'_2 ayant le point commun M, les droites n'_1, n'_2 le point N et les droites p'_1, p'_2 le point P ; de plus, les plans $m'_1m'_2$, $n'_1n'_2$ et $p'_1p'_2$ passant par une même droite, celle-ci doit faire partie de la surface.

La surface cubique générale possède vingt-sept droites, mais dans le cas particulier où cette surface a deux points doubles, on sait que la droite a compte pour quatre et chacune des droites b_{ij} pour deux. Nous avons donc déterminé toutes les droites de la surface.

4. On peut démontrer directement que tout plan π mené par la droite A_1A_2 rencontre la surface cubique suivant une conique.

En effet, soit Q l'intersection de la droite A_1A_2 et du plan α, et q la droite commune aux plans π et α. Le faisceau de coniques marque sur q des couples de points (N, N') en involution. Il est clair que les droites A_1N et A_2N', A_1N' et A_2N se coupent en des points R, S de la surface cubique. Or A_1N et A_2N', A_1N' et A_2N sont des éléments homologues de deux faisceaux projectifs ; donc les points R et S engendrent une conique. La droite RS passe par un point fixe U, conjugué harmonique de Q par rapport à A_1A_2; car RS est une diagonale d'un quadrilatère complet $A_1A_2N'N$.

II. — Sur la cubique gauche.

Dans cette note, nous donnons un procédé pour construire la cubique gauche donnée par cinq points et une bisécante.

Nous démontrerons d'abord deux propositions qui nous ont conduit à cette construction.

1. *Si un triangle* ABC *se déforme de manière que deux côtés* AB, AC *tournent autour de deux points fixes* C′, B′ *et que les sommets* B, C *se meuvent dans deux plans donnés* β *et* γ, *tandis que le troisième côté* BC *s'appuie constamment sur une droite donnée* l, *le sommet* A *décrit une quadrique passant par* B′, C′ *et par la droite* $\beta\gamma$.

En effet, un plan quelconque π mené par la droite B′C′ rencontre les plans β, γ suivant deux droites b, c et la droite l en un point L. Si dans ce plan on mène par L une droite quelconque qui rencontre b en B, c en C, les droites BC′, CB′ se coupent en un point A du lieu cherché. D'après le théorème de Maclaurin et Braikenridge, on obtient ainsi dans le plan π une conique passant par B′, C′ et par le point de concours U des droites b, c.

Concluons déjà de là que la droite entière $\beta\gamma \equiv g$ fait partie du lieu.

Projetons les différents points d'une droite d, des points B′, C′ respectivement sur les plans β, γ, et joignons les points d'intersection correspondants. Les droites ainsi obtenues décriront évidemment un hyperboloïde à une nappe (*) passant par la droite B′C′. La droite l rencontre cette quadrique en deux points qui determinent deux génératrices. A ces génératrices correspondent des points de la surface cherchée situés sur la droite d, donc cette surface est bien du second ordre.

(*) Comparer J. Neuberg, *Question 1628*. (Mathesis, 1907, 3e sér., t. VII, pp. 168 et 254.)

Plus simplement, un plan mené par l et tournant autour de cette droite, marque sur les plans β, γ deux faisceaux projectifs qui ont pour centres les points de rencontre B_1, C_1 de la droite l avec β et γ. Les plans menés par deux rayons homologues de ces faisceaux et respectivement par les droites C_1B, B_1C se coupent suivant une droite h dont tous les points appartiennent au lieu (A); or ces plans engendrent deux faisceaux projectifs.

2. Considérons maintenant un triangle variable ABC, dont deux côtés AB, AC tournent autour de deux points fixes C', B'; dont les sommets B, C se meuvent dans deux plans donnés β, γ et dont le troisième côté BC doit s'appuyer sur deux droites données l, l_1 (et sur la droite $B'C' \equiv l_2$).

D'après ce qui précède, si BC doit s'appuyer seulement sur l (et sur l_2), le point A décrit une quadrique; si BC s'appuie sur l_1 (et l_2), le point A décrit une seconde quadrique. Ces quadriques ayant une droite commune $\beta\gamma$, leur intersection est une cubique gauche passant par B', C' et bisécante à la droite $\beta\gamma$. Donc :

Si un triangle se déforme de telle manière que deux de ses côtés passent par deux points fixes, tandis que les sommets opposés décrivent deux plans donnés, le troisième côté s'appuyant sur deux droites fixes, le troisième sommet décrira une cubique gauche passant par les points fixes et bisécante à la droite commune aux deux plans donnés.

Voici une démonstration directe de ce théorème. La droite BC qui doit s'appuyer sur l, l_1, l_2 engendre un hyperboloïde qui rencontre les plans β, γ suivant deux coniques K_β, K_γ. L'intersection des cônes (C', K_β), (B', K_γ) décrit le lieu cherché. Ces cônes ont la génératrice commune $B'C'$; car si la droite $B'C'$ coupe β en B'', γ en C'', on peut prendre pour BC la droite menée par B'' et s'appuyant sur l, l_1; alors A se confondra avec B', etc.

3. Soient A_1, ..., A_5 cinq points et g une droite. Proposons-nous de construire la cubique gauche passant par ces cinq points et bisécante à la droite.

Nous prendrons A_1, A_2 pour les points B', C' et deux plans quelconques menés par g pour β et γ. Alors, les droites A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5 rencontrent β en trois points A'_3, A'_4, A'_5 et les droites A_2A_3, A_2A_4, A_2A_5 rencontrent en A''_3, A''_4, A''_5 ; les droites $A'_3A''_3$, $A'_4A''_4$, $A'_5A''_5$ représentent trois positions de la droite BC. Pour l et l_1, il suffira de prendre deux droites s'appuyant à la fois sur $A'_3A''_3$, $A'_4A''_4$, $A'_5A''_5$. On remarquera que d'après la construction, ces trois dernières droites s'appuient sur la droite A_1A_2.

III. — Un théorème sur les surfaces.

1. Le théorème donnant le nombre de droites d'une surface d'ordre n possédant une droite multiple d'ordre $(n - 2)$ a été démontré par MM. Sturm (*), Murer (**), Fouret (***), Stuyvaert (IV) et De Vries (V). Dans cette note, nous nous proposons de le démontrer en nous basant sur cette remarque qu'une droite qui rencontre une surface d'ordre n en $(n + 1)$ points appartient tout entière à la surface. Cette remarque a déjà été utilisée pour d'autres démonstrations par M. J. De Vries (VI) et par nous (VII).

2. Soient d la droite multiple et ε_1, ε_2, ε_3 trois sections planes quelconques de la surface.

(*) *Ueber die Flächen mit einer endlichen Zahl von (einfachen) geraden, vorzugsweise die der vierten und fünften Ordnung.* (MATH. ANN., 1871, t. IV, pp. 249-283).

(**) *Generazione della superficie d'ordine* n *con retta* (n — 2) *pla.* (RENDICONTI DI PALERMO, 1888, t. II, pp. 107-109.)

(***) *Sur le nombre de plans tangents que l'on peut mener à une surface algébrique par une droite multiple de cette surface.* (RENDICONTI DI PALERMO, 1894, t. VIII, pp. 202-208.)

(IV) STUYVAERT, *Sur quelques surfaces algébriques engendrées par des courbes du second et du troisième ordre. Dissertation inaugurale.* Gand, Hoste, 1902, p. 13.

(V) J. DE VRIES, *Right lines on surfaces with multiple right lines.* (PROCEEDINGS OF AMSTERDAM, 28 avril 1902, pp. 577-583.)

(VI) *Loc. cit.*, § 6.

(VII) *Notes de géométrie synthétique.* (MÉM. DE LA SOC. DES SCIENCES DE MONS, 6e sér., t. IX, 1907, p. 10.)

Les droites qui s'appuient sur d, ε_1, ε_2 et ε_3 en des points distincts rencontrent la surface en $n+1$ points, donc elles appartiennent à cette surface.

Considérons la réglée R engendrée par les droites qui s'appuient sur d, ε_1 et ε_2.

L'ordre de multiplicité de d sur R est évidemment égal au nombre de droites passant par un point de d et s'appuyant en des points distincts sur ε_1 et ε_2.

Projetons les courbes ε_1, ε_2 d'un point de d; les cônes ainsi obtenus ont n^2 génératrices communes, mais ε_1 et ε_2 ont n points communs et de plus ont sur d un point multiple d'ordre $n-2$, donc de ces n^2 droites on doit retrancher n droites et $(n-2)^2$ fois la droite d; donc la droite d est multiple d'ordre

$$n^2 - n - (n-2)^2 = 3n - 4.$$

On trouverait de même que chacune des courbes ε_1, ε_2 est multiple d'ordre deux.

Le plan de ε_1 contient n génératrices de R, donc cette surface est d'ordre $2n + n = 3n$.

La surface R rencontre ε_3 en $3n^2$ points; ceux de ces points qui ne sont pas sur d, ε_1 et ε_2 sont au nombre de

$$3n^2 - (n-2)(3n-4) - 2 \, . \, 2n = 2(3n-4).$$

Par chacun de ces points passe une droite de la surface donnée. Il est évident que ces droites forment $3n-4$ coniques dégénérées (*).

Nous remercions M. Neuberg pour les conseils qu'il a bien voulu nous donner pour la rédaction de ce petit travail.

Liége, 24 février 1908.

(*) Après coup, nous devons ajouter : H. BATEMAN, *The tangent planes which can be drawn to an algebraic surface from a multiple line.* (ARCHIV DER MATH. UND PHYS., 1908, Bd XIII, pp. 48-51.)