NOTES DE GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE (*),

par M. Lucien Godeaux, étudiant à l'Université de Liège.

I. *Sur une surface algébrique du septième ordre.* La géométrie de l'angle plan dans l'espace ordinaire est une géométrie à sept dimensions. Lorsque l'angle est assujetti à cinq conditions, son sommet décrit une surface et son plan enveloppe aussi une surface. Dans cette note, nous étudions un de ces cas, que l'on pourrait appeler *congruence d'angles*.

1. Soient G_1, G_2, deux congruences linéaires de droites de directrices respectivement (a_1, b_1) (a_2, b_2) Soit encore un plan π et dans ce plan, un faisceau ponctuel F de coniques, dont les points de base sont A_1, A_2, A_3 et A_4.

Recherchons le lieu du sommet d'un angle dont les côtés décrivent les congruences G_1, G_2, et rencontrent le plan π en des couples de points situés sur une même conique du faisceau F.

Soit x une droite portant deux ponctuelles (x_1), (x_2). Par un point x_1 la première, menons la droite qui s'appuie sur a_1, b_1. Par le point où cette droite rencontre le plan π, menons la conique de F. Les droites de G_2 qui s'appuient sur cette conique et sur x sont au nombre de quatre et marquent sur cette dernière droite, quatre points x_2. La correspondance liant les ponctuelles (x_1), (x_2) est évidemment réversible ; il y a donc huit coïncidences, mais l'une de celles-ci appartient au plan π ; donc :

Le sommet d un angle plan dont les côtés décrivent deux congruences linéaires et rencontrent un plan fixe en des points d'une même conique d'un faisceau donné, décrit une surface du septième ordre.

2. Soit x une droite de la congruence G_1. Cette droite détermine une conique de F Les droites de G_2 s'appuyant sur cette conique, engendrent

(*) *Synthétique*, en ce sens que l'article de notre collaborateur ne contient pas *explicitement* d'analyse ; mais presque toutes les propositions sur lesquelles il s'appuie sont, en réalité, des théorèmes d'algèbre. Ne serait-il pas plus clair pour la plupart des lecteurs habituels de *Mathesis* d'employer plus explicitement le langage ordinaire de la géométrie analytique? Exemples (1re phrase) : Un angle dépend de sept paramètres. (1er théorème) : Le sommet d'un angle plan, dont les côtés s'appuient chacun sur deux droites données et rencontrent, etc. (P. M.)

une surface qui rencontre x en trois points situés en dehors de π; on en conclut que les directrices des congruences G_1, G_2, sont des droites doubles de la surface.

Les droites des congruences G_1, G_2, issues des points A_1, A_2, A_3, A_4, appartiennent évidemment à la surface. Il en est de même des deux transversales des quatre directrices de G_1, G_2.

En résumé, *la surface du septième ordre possède quatre droites doubles et dix droites simples.*

3. On déduit les propriétés du plan de l'angle par corrélation.

4. Supposons que les droites a_1 et b_2 coïncident. Dans ce cas, toutes les droites s'appuyant sur a_1, b_1, a_2 appartiennent à la surface ; celle-ci se réduit donc à une surface du cinquième ordre.

Soit α un plan passant par la droite a_1. Ce plan rencontre la surface suivant une conique engendrée par deux faisceaux de rayons projectifs, de centres respectifs (α, b_1), (α, a_2). Ces faisceaux découpent sur la droite (π, α) la même involution que les coniques de F.

On peut donc énoncer le théorème :

La surface du cinquième ordre possède une droite triple et vingt-quatre droites simples (*).

5. Supposons que deux droites a_1, b_1 se coupent ; alors la congruence G_1 dégénère en une gerbe et un système plan réglé.

Il est facile de voir que chaque point de ce plan appartient deux fois à la surface du septième ordre et qu'on peut énoncer le théorème suivant :

Le lieu du sommet d'un angle variable dont les côtés rencontrent un plan fixe en des points d'une conique d'un faisceau, l'un passant par un point fixe, l'autre, appartenant à une congruence linéaire, est une surface du cinquième ordre, possédant un point et deux droites doubles et neuf droites simples.

Nous avons examiné précédemment le cas où a_2 et b_2 se coupent (**).

II. *Une génération du complexe cubique.* Dans cette note, nous déduisons une génération du complexe cubique d'une génération d'un

(*) *A propos d'un article de M. Bateman* (*Note bibliographique*) (Arch. der Math. und Phys. (3), XIII, p. 370).

(**) *Notes de Géométrie* (Mém. de la Soc. des sc. de Liége, 1908, 3e série, tome VIII).

complexe biquadratique particulier. Nous suivons une marche déjà employée par M. Le Paige (*).

1. Nous avons établi naguère le théorème suivant (**) :

Le lieu d'une droite g telle que les plans qu'elle détermine avec quatre points fixes A_1, A_2, A_3, A_4 *rencontrent quatre droites fixes* a_1, a_2, a_3, a_4 *respectivement en quatre points coplanaires, est un complexe du quatrième degré (ordre et classe).*

La démonstration de ce théorème est aisée. Soient p_1, p_2, p_3, p_4 les rayons de quatre faisceaux de droites de centre P et de plan π communs. Prenons un rayon p_1, un rayon p_2 et un rayon p_3 et menons les plans (p_1A_1), (p_2A_2), (p_3A_3). Les points de rencontre de ces plans respectivement avec les droites a_1, a_2, a_3 déterminent un plan α. Les points $(a_4\alpha)$, A_4 et P déterminent un plan qui rencontre le plan π suivant un rayon p_4. A cause de la symétrie, on peut dire que les rayons p_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sont liés par une correspondance (1, 1, 1, 1). D'après le principe de Chasles généralisé par F. Deruyts, il y a quatre coïncidences, d'où le théorème.

D'après la génération même, on voit que les points A_1, A_2, A_3 et A_4 sont des points principaux du complexe.

2. Supposons que ces quatre points sont sur une même droite d. Soit g une droite s'appuyant en un point quelconque sur d. Les plans menés par cette droite et par chacun des points A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sont confondus en un seul et par conséquent, ces plans rencontrent les droites a_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ en des points coplanaires. Dans le cas actuel, le complexe dégénère donc en un complexe linéaire spécial et en un complexe cubique. Donc :

Le lieu d'une droite telle que les plans qu'elle détermine avec quatre points collinéaires, rencontrent respectivement quatre droites fixes en quatre points coplanaires, est un complexe cubique (***).

(*) *Sur la génération de certaines surfaces par des faisceaux quadrilinéaires.* (Bull. de l'Acad. R. de Belgique, 1884 (3), VIII, p. 238).

(**) *Le théorème de Grassmann dans l'espace à n dimensions.* (Académie des sciences d'Amsterdam. Proceedings. 28 septembre 1907.)

(***) Extrait de *Mathesis*, 1909, 3e série, tome IX, pp. 34-37.