Sonderabdruck aus Archiv für Mathematik und Physik. III. Reihe. XIII. Heft 2.
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Sur un mode de génération de la cubique gauche;

Par Lucien Godeaux, à Liége.

Dans cette note, nous donnons un procédé de génération de la cubique gauche que nous croyons nouveau. Nous en montrons quelques applications à l'étude de certaines congruences de cubiques gauches.

1. Soient A_1, A_2 deux points quelconques fixes; α_1, α_2 deux plans fixes et a_1, a_2 deux droites fixes.

Le troisième côté d'un triangle dont les deux premiers passent chacun par un des points A_1, A_2 s'appuie nécessairement sur la droite $A_1 A_2$.

Désignons par Q le système de droites s'appuyant sur a_1, a_2 et $A_1 A_2$. Ces droites marquent généralement sur α_1, α_2 des coniques ε_1, ε_2. Projetons ε_1 de A_1 et ε_2 de A_2. Les cônes ainsi obtenus ont en commun la droite $A_1 A_2$ et une cubique gauche $\varkappa_3$ passant par A_1, A_2 et s'appuyant en deux points sur la droite (α_1, α_2), ces points étant précisément ceux où cette droite rencontre le système réglé Q. On a donc:

Si un triangle se déforme de telle manière que deux sommets décrivent les plans α_1, α_2, tandis que les côtés opposés passent par les points A_1, A_2 et que le troisième côté décrit un système de génératrices d'une quadrique passant par la droite $A_1 A_2$, le troisième sommet décrira une cubique gauche passant par A_1, A_2 et rencontrant deux fois la droite (α_1, α_2).

Ce théorème permet de construire facilement une cubique gauche donnée par six points, par exemple, mais nous allons nous en servir ici pour engendrer quelques congruences de cubiques gauches.

2. Par la droite (α_1, α_2) et par la cubique gauche $\varkappa_3$ passent toutes les quadriques d'un faisceau.

Chacune de ces quadriques peut être engendrée de la manière suivante:

Si un triangle se déforme de telle manière que deux de ses sommets décrivent deux plans α_1, α_2 tandis que les côtés opposés passent par les points A_1, A_2 et que le troisième côté s'appuie sur deux droites a et $A_1 A_2$, le troisième sommet décrira une quadrique passant par A_1, A_2 et par la droite (α_1, α_2).

Nous avons établi ce théorème sous une forme plus générale dans une note "*Sur la génération de quelques surfaces algébriques*" qui paraîtra sous peu.

Nous nous servirons de ce théorème dans la suite.

3. Supposons que la droite a_1 décrive un faisceau-plan de sommet P_1 et de plan π_1. De même, faisons décrire à la droite a_2 un faisceau-plan (P_2, π_2).

Nous obtenons de la sorte ∞^2 systèmes Q. Les cubiques gauches correspondantes engendrent une congruence ϱ_1.

On voit immédiatement que les points A_1 et A_2 sont des points fondamentaux et que la droite (α_1, α_2) est une droite fondamentale de la congruence ϱ_1.

Recherchons l'ordre de ϱ_1, c'est-à-dire le nombre de cubiques gauches de la congruence passant par un point X.

Par le point X menons les droites $x_1 \equiv (A_1, X)$ et $x_2 \equiv (A_2, X)$. La droite x qui joint les points (α_1, x_1) et (α_2, x_2) s'appuie évidemment sur la droite $A_1 A_2$. Le point (x_1, π_1) détermine une droite du faisceau (P_1, π_1) et le point (x_2, π_2) une droite du faisceau (P_2, π_2). Les droites qui s'appuient sur ces deux droites et sur $A_1 A_2$ engendrent un système Q comprenant x. A ce système Q correspond une cubique gauche passant par X, donc la congruence ϱ_1 est du premier ordre.

Recherchons maintenant la classe de ϱ_1.

Soit y une droite. Projetons la droite y des points A_1 et A_2 respectivement en y_1 et y_2 sur α_1 et α_2. Aux points de y correspondent les droites s'appuyant sur y_1, y_2 et $A_1 A_2$. La classe de la congruence ϱ_1 est évidemment égale au nombre de systèmes Q qui ont deux droites en commun avec le système correspondant à y. Le principe de Chasles permet de vérifier aisément que ce nombre est quatre. Donc la congruence ϱ_1 est de classe quatre.

Nous avons dit plus haut que la congruence ϱ_1 possédait deux points fondamentaux A_1, A_2 et une corde fondamentale (α_1, α_2). Les cubiques gauches de la congruence sont encore assujetties à d'autres conditions que nous allons énumérer.

Aux droites qui s'appuient sur $A_1 A_2$ et sur une droite du faisceau (P_1, π_1) correspondent les points d'une quadrique. Lorsque cette dernière droite décrit le faisceau, on a un faisceau de quadriques qui passent toutes par A_1, A_2 et (α_1, α_2). Recherchons les autres points communs à toutes les quadriques de ce faisceau.

Les congruences aux droites desquelles correspondent les points des quadriques ont en commun deux faisceaux-plans. Le premier a pour sommet $(A_1 A_2, \pi_1)$ et pour plan π_1, le second a pour sommet P_1 et pour plan $P_1 A_1 A_2$.

Tous les systèmes Q envisagés dans la question qui nous occupe ont une droite située dans chacun de ces faisceaux-plans, donc les lignes qui correspondent à ces faisceaux sont des lignes singulières de ϱ_1.

Aux droites du premier faisceau correspondent les points d'une droite qui s'appuie sur (α_1, α_2) et aux droites du second les points d'une conique passant par A_1, A_2, s'appuyant sur (α_1, α_2) et sur la droite trouvée ci-dessus.

On aurait la même chose en considérant le faisceau (P_2, π_2)

En résumé: *La congruence ϱ_1 est d'ordre un et de classe quatre, elle possède deux points fondamentaux et une droite fondamentale; les lignes singulières sont deux droites s'appuyant sur la corde fondamentale et deux coniques non co-planaires passant par les points fondamentaux et par les points singuliers situés dans leur plan.*

4. Soient φ_1 et φ_2 deux faisceaux de complexes linéaires.

Prenons pour la droite a_1 la conjuguée de la droite $A_1 A_2$ par rapport à un complexe du faisceau φ_1 et pour la droite A_2 la conjuguée de la même droite, mais par rapport à un complexe du faisceau φ_2.

Les droites a_1 et a_2 sont en nombre ∞^1, on a donc ∞^2 systèmes Q et par conséquent une congruence ϱ_2 de cubiques gauches.

Aux droites qui s'appuient sur $A_1 A_2$ et sur une droite a_1 correspondent les points d'une quadrique passant par A_1, A_2 et (α_1, α_2). Lorsque la droite a_1 varie suivant la règle indiquée plus haut, il est aisé de constater que la quadrique décrit un faisceau ψ_1 dont la base est formée par la droite (α_1, α_2) et par une cubique gauche c_1 bisécante de (α_1, α_2) et passant par A_1 et A_2.

On obtient de même avec a_2 un faisceau ψ_2 et une courbe c_2.

On en conclut que les cubiques gauches de la congruence ϱ_2 sont les intersections partielles des quadriques de deux faisceaux ψ_1 et ψ_2.

De là: *La congruence ϱ_2 est bilinéaire et possède deux points et une corde fondamentaux. Elle possède deux cubiques gauches singulières telles que chaque cubique de la congruence s'appuie deux fois sur chacune de ces lignes singulières.*

Cette congruence est un cas particulier d'une congruence *de* M. Veneroni *(Sopra alcuni sistemi di cubiche gobbe. Rendiconti di Palermo. 1902, tome XVI).* M. Stuyvaert fera paraître avant peu un mémoire sur un système plus général. On peut aussi consulter de ce dernier Géomètre deux Mémoires où il expose une théorie complète des congruences de variétés algébriques (*C. R. novembre 1905; Journal de Crelle, 1907 — tome 132).*

Liége, 27 Janvier 1908.